

En nuestro familiar sistema decimal, esta operación tendría la siguiente forma:

$$\begin{array}{r} 130 : 7 = 18 \\ 7 \cdot \\ \hline 60 \\ 56 \\ \hline 4 \end{array}$$

El dividendo, el divisor, el cociente y el residuo en ambos casos son, en esencia idénticos, aunque las cuentas intermedias sean diferentes.

[Volver](#)

### 3. ¿Par o impar?

No viendo el número, naturalmente resulta difícil saber si es par o impar. Pero desde luego, nos resulta fácil decirlo apenas percibido un número dado. Por ejemplo, ¿el número 16 es par o impar? Si sabemos que está escrito en el sistema decimal, se está en lo justo al afirmar que dicho número es par. Pero cuando se escribe en cualquier otro sistema, ¿se puede estar seguro de que él representa, infaliblemente, un número par?

Evidentemente no. Si la base es, por ejemplo, siete, "16" denota  $7 + 6 = 13$ , un número impar, Exactamente será, también, para toda base impar. (Porque todo número impar + 6 es también un número impar).

De aquí la conclusión de que la divisibilidad entre dos (la última cifra par) conocida por nosotros, útil incondicionalmente sólo para el sistema de numeración decimal, para otros sistemas no lo es siempre. A saber, es justa solamente para sistemas de numeración con base par: de base seis, ocho, etc. ¿Cuál es la divisibilidad entre 2 para los sistemas de base impar? Es suficiente una corta reflexión para establecerla: la suma de las cifras deberá ser par. Por ejemplo, el número "136" es par en todo sistema de numeración, inclusive también con base impar; en efecto, en el último caso tenemos: un número impar<sup>9</sup> + un número impar + un par = número par,

Con la misma precaución es necesario referirse al problema: ¿Siempre es divisible el número 25 entre cinco? En el sistema de base siete u ocho, el número así representado no es divisible entre 5 (porque es igual a diecinueve o a veintiuno). En la misma forma, la bien conocida divisibilidad entre 9 (de acuerdo a la suma de las cifras) es justa, únicamente, para el sistema decimal. Por el contrario, en el sistema quinario se aplica la divisibilidad para el 4, y, por ejemplo, en el de base siete, para el 6. Así, el número "323" en el sistema quinario es divisible entre 4, porque  $3 + 2 + 3 = 8$ , y el número "51" en el de base siete, es divisible entre 6 (es fácil convencerse de ello trasladando los números al sistema decimal): obtenemos respectivamente, 88 y 36). El lector mismo puede darse cuenta de por qué esto es así, si profundiza bien en la deducción de la divisibilidad entre 9 y aplica los mismos razonamientos, correspondientemente modificados, por ejemplo, al sistema de base siete para la deducción de la divisibilidad entre 6.

Es más arduo demostrar por un medio puramente aritmético, la legitimidad de las siguientes tesis:

$$\begin{array}{l} 121 : 11 = 11 \\ 144 : 12 = 12 \\ 21 \times 21 = 441 \end{array}$$

en todos los sistemas de numeración (en donde se tengan las cifras correspondientes).

---

<sup>9</sup> Un número impar multiplicado por sí mismo (es decir, por un impar), siempre da un número impar (por ejemplo,  $7 \times 7 = 49$ ,  $11 \times 11 = 121$ , etc.)

Para los entendidos con los rudimentos del álgebra, es fácil hallar la base, que explique la propiedad de estas igualdades. Los restantes lectores las pueden experimentar para diversos sistemas de numeración.

[Volver](#)

#### 4. Problemas instructivos.

1. ¿Cuándo  $2 \times 2 = 100$ ?<sup>10</sup>
2. ¿Cuándo  $2 \times 2 = 11$ ?<sup>11</sup>
3. ¿Cuándo 10 es número impar?<sup>12</sup>
4. ¿Cuándo  $2 \times 3 = 11$ ?<sup>13</sup>
5. ¿Cuándo  $3 \times 3 = 14$ ?<sup>14</sup>

Las respuestas a estas preguntas no deben dificultarse al lector que ha estado al corriente de este capítulo.

[Volver](#)

#### 5. Fracciones sin denominador

Estamos habituados: al hecho de que, solamente las fracciones decimales se escriben sin denominador. Por tal razón, a simple vista, al parecer, no es posible escribir directamente sin denominador la fracción  $2/7$  ó  $1/3$ . Sin embargo la cuestión se nos presenta en otra forma si pensamos en que son posibles las fracciones sin denominador en otros sistemas de numeración. ¿En el sistema quinario, qué denota, por ejemplo, la fracción "0.4"? Naturalmente,  $4/5$ . En el sistema septenario la fracción "1.27" denota  $1 \frac{2}{7}$ . ¿Y qué denota en el mismo sistema septenario la fracción 0.33"? Aquí el resultado más complicado:  $3/7 + 4/9 = 24/49$ .

Consideremos aún, algunas fracciones no decimales sin denominador ¿A qué es igual

1. "2.121" en el sistema ternario?
2. "1.011" en el sistema binario?
3. "3.431" en el sistema quinario?
4. "2.(5)" en el sistema septenario?

Respuestas:

1.  $2 + 1/3 + 2/9 + 1/27 = 2 \frac{16}{27}$ .
2.  $1 + 1/4 + 1/8 = 1 \frac{3}{8}$ .
3.  $3 + 4/5 + 3/25 + 1/125 = 3 \frac{116}{125}$ .
4.  $2 + 5/7 + 5/49 + 5/343 + \dots = 2 \frac{5}{6}$ .

El lector puede darse cuenta fácilmente de la justeza de la íntima igualdad si prueba aplicar al caso dado con la modificación correspondiente los razonamientos que se refieren a la transformación de fracciones decimales y periódicas a ordinarias.

Para concluir el capítulo, consideremos algunos problemas de índole especial (ver las respuestas al final del libro):

---

<sup>10</sup>  $2 \times 2 = 100$  cuando "100" está escrito en el sistema binario.

<sup>11</sup>  $2 \times 2 = 11$  cuando "11" esta escrito en el sistema ternario.

<sup>12</sup> "10" es impar cuando está escrito en el sistema quinario, y también en los sistemas con base 3, 7 y 9.

<sup>13</sup>  $2 \times 3 = 11$  cuando "11" está escrito en el sistema quinario.

<sup>14</sup>  $3 \times 3 = 14$ , cuando 14 está escrito en el sistema quinario.

Problema 10. ¿En qué sistema de numeración está efectuada la siguiente adición?:

$$\begin{array}{r} 756 \\ 307 \\ + 2456 \\ \hline 24 \\ \hline 3767 \end{array}$$

Problema 11. En qué sistema de numeración está efectuada la división:

$$\begin{array}{r} 4415400 : 4532 = 543 \\ 40344 \dots \\ \hline 34100 \dots \\ - 31412 \dots \\ \hline 22440 \dots \\ - 22440 \dots \\ \hline 0 \end{array}$$

Problema 12. Escriba el número "ciento treinta" en todos los sistemas de numeración del binario al decimal, inclusive.

Problema 13. ¿A qué es igual el número "123" si se le considera escrito en todos los sistemas de numeración, hasta el nonario inclusive? ¿Es posible escribirlo en el sistema binario? ¿Y en el sistema ternario? Si está escrito en el sistema quinario, ¿se puede saber si es divisible exactamente entre dos, sin transcribirlo en el sistema decimal? Si está escrito en el sistema de base nueve, ¿es divisible exactamente entre cuatro?

[Volver](#)

## 6. Curiosidad Aritmética

$$2^5 \times 9^2 = 2592$$

[Volver](#)



## Capítulo Quinto

### Galería de Maravillas Numéricas

Contenido:

1. [Museo De Curiosidades Aritméticas](#)
2. [El Número 12](#)
3. [Número 365](#)
4. [Tres Nueves](#)
5. [El Número de Scheherazada](#)
6. [El Número 10101](#)
7. [El Número 10001](#)
8. [Seis Unidades](#)
9. [Pirámides Numéricas](#)
10. [Nueve Cifras Iguales](#)
11. [Escala Numérica](#)
12. [Anillos Mágicos](#)
13. [Una Familia Fenomenal](#)
14. [Curiosidades Aritméticas](#)

#### 1. Museo De Curiosidades Aritméticas

En el mundo de los números, como también en el mundo de los seres vivos, se encuentran maravillas auténticas, ejemplares únicos, que poseen propiedades singulares. A partir de tales números no ordinarios de dicha especie, pudo ser constituido un museo de rarezas numéricas: el presente "museo de curiosidades aritméticas". En sus vitrinas hallaremos el lugar, no solamente de los gigantes numéricos sobre los que charlaremos aún más en un capítulo especial, sino también de los números de dimensiones discretas que, en compensación, se distinguen de la serie de los otros por ciertas propiedades no habituales. Algunos de ellos atraen la atención ya, por la

<sup>1</sup> En el dibujo de esta página dice, de arriba a abajo, respectivamente: ¿10 ó 12?; pie = 12 pulgadas: metro = 10 decímetros.

apariencia; otros descubren sus particularidades singulares solamente con un conocimiento más profundo.

Las particularidades interesantes de ciertos números representados en nuestra "galería", no tienen nada en común con algunas singularidades imaginarias que, los aficionados a lo misterioso, perciben en otros números. Como ejemplo de semejantes supersticiones numéricas, puede servir la siguiente reflexión aritmética, expresada sin cautela por el conocido escritor francés Víctor Hugo:

"El tres es un número perfecto. La unidad es al número 3, lo mismo que el diámetro al círculo. El número 3 es el único que posee centro. Los demás números, son elipses que tienen dos focos. De aquí, se sigue una particularidad propia, exclusiva del número 3. Al sumar las cifras de cualquier número múltiplo de 3, la suma es divisible exactamente entre 3".

En esta vaga y aparentemente profunda revelación, todo es inexacto; lo que no es frase, carece de sentido o es un absurdo. Solamente es justa la observación sobre la propiedad de la suma de las cifras, pero dicha propiedad no surge de lo señalado, y por lo mismo no representa una particularidad exclusiva del número 3: por ella se distingue en el sistema decimal, también el número 9, y en otros sistemas, los números menores, en una unidad, que la base.

Las maravillas de nuestra "galería" son de otro tipo: en ellas no hay nada misterioso ni indescifrable.



*Figura 25. Vitrina de maravillas aritméticas*

Invito al lector a realizar una excursión por la galería de tales maravillas numéricas y a entablar conocimiento con algunas de ellas.

Pasemos, sin detenernos, delante de las primeras vitrinas que encierran números cuyas propiedades son bien conocidas de nosotros. Sabemos ya por qué se hallaba el número 2 en la

galería de maravillas: no porque sea el primer número par<sup>2</sup> sino porque es la base de un interesante sistema de numeración.<sup>3</sup>

No será inesperado para nosotros encontrar aquí el número 9, también naturalmente, no como un "símbolo de constancia"<sup>4</sup> sino como el número que nos asegura la comprobación de todas las operaciones aritmética. Pero aquí está la vitrina; veamos a través de su cristal.

[Volver](#)

## 2. El Número 12

¿Qué tan admirable es?. Es el número de meses en el año y el número de unidades en la docena. Pero, en esencia, ¿qué hay de particular en la docena?. Por pocos es conocido que el 12 es el antiguo y derrotado rival del número 10 en la lucha por el puesto honorífico de base del sistema de numeración. Un pueblo de gran cultura del Antiguo Oriente, los babilonios, y sus predecesores sumerios, realizaban los cálculos en el sistema duodecimal de numeración. Hasta ahora, hemos pagado algo de tributo a este sistema, no obstante la victoria del decimal. Nuestra afición a las docenas y las gruesas<sup>5</sup>, nuestra división del día en dos docenas de horas, la división de la hora en 5 docenas de minutos, la división del minuto en otros tantos segundos, la división del círculo en 30 docenas de grados, y finalmente, la división del pie en 12 pulgadas ¿no atestiguan todo esto (y muchas otras cosas) sobre la gran influencia, en nuestros días, del antiguo sistema?

¿Es conveniente que en la lucha entre la docena y la decena halla triunfado esta última?.

Naturalmente, por las intensas ligas de la decena con los diez dedos, nuestras propias manos han sido y continúan siendo máquinas calculadoras naturales. Pero si no fuera por esto, entonces convendría, incondicionalmente, dar la preferencia al 12 antes que al 10. Es mucho más conveniente realizar los cálculos en el sistema duodecimal que en el decimal. Esto se debe a que el número 10 es divisible entre 2 y 5, mientras que el 12 es divisible entre 2, 3, 4 y 6. En 10 hay, en total, dos divisores; en 12, cuatro. Las ventajas del sistema duodecimal se tornan claras si se considera que en este sistema un número que termina con cero, es múltiplo de 2, 3, 9 y 6: reflexiónese: ¡qué tan cómodo es dividir un número cuando precisamente  $1/2$ ,  $1/3$ ,  $1/4$  y  $7/6$  deben ser números enteros!

Si el número expresado en el sistema duodecimal termina con dos ceros, deberá ser divisible entre 144, y por consiguiente, también entre todos los multiplicadores de 144, es decir, entre la siguiente serie de números:

2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 36, 48, 72, 144.

Catorce divisores, en lugar de los ocho que tienen los números escritos en el sistema decimal, si terminan con dos ceros (2, 4, 5, 10, 20, 25, 50 y 100). En nuestro sistema solamente fracciones de la forma  $1/2$ ,  $1/4$ ,  $1/5$ ,  $1/20$  etc., se convierten en decimales finitos; en el sistema duodecimal se pueden escribir: sin denominador mucho más diversas fracciones y ante todo:  $1/2$ ,  $1/3$ ,  $1/4$ ,  $1/6$ ,

<sup>2</sup> Como primer número par se puede, por otra parte, considerar, no al 2, sino al 0.

<sup>3</sup> Se refiere al sistema binario de numeración que se aplica para representación de los números y la realización de las operaciones en la generalidad de las máquinas computadoras aritméticas. La utilización de dicho sistema permite el empleo, en la construcción y análisis de esquemas funcionales de la lógica matemática y asegurar una simplificación substancial de la estructura de los dispositivos aritméticos y de memoria, en comparación con los casos en que se usan otros sistemas de numeración.

<sup>4</sup> Los antiguos (discípulos de Pitágoras) consideraban el 9 como un símbolo de constancia, "puesto que todos los números múltiples de 9, tienen como suma de las cifras, un múltiplo de 9".

<sup>5</sup> Una gruesa son 12 docenas. 144 objetos de un mismo género constituyen una gruesa.

$1/8, 1/9, 1/12, 1/16, 1/18, 1/24, 1/36, 1/48, 1/72, 1/144$ , las que respectivamente se representan así:

0.6: 0.4; 0.3: 0.2; 0.16; 0.14: 0.1; 0.09; 0.08; 0.06; 0.04: 0.03: 0.02; 0.01.

Por otra parte, sería un gran error pensar que la divisibilidad de un número puede depender del sistema de numeración en que esté representado. Si unas nueces contenidas en un saco, pueden ser separadas en 5 montones idénticos, entonces esta propiedad de ellas, naturalmente, no se modifica a causa de que nuestro número de nueces esté expresado en uno u otro sistema de numeración o dispuesto en un ábaco, o escrito con letras, o representado por cualquier otro método. Si el número escrito en el sistema duodecimal es divisible entre 6 o entre 72, entonces, al ser expresado en otro sistema de numeración, por ejemplo en el decimal, deberá tener los mismos divisores. La diferencia consiste únicamente en que, en el sistema duodecimal la divisibilidad entre 6 o entre 72 es fácil de descubrir (el número termina en uno o en dos ceros).

Ante tales ventajas del sistema duodecimal, no es extraño que entre los matemáticos se corriera la voz en favor de un traslado total a este sistema. Sin embargo, estamos ya demasiado acostumbrados al sistema decimal como para resolverse por tal sistema.

El gran matemático francés Laplace emitió la siguiente opinión respecto a dicho problema: "La base de nuestro sistema de numeración no es divisible entre 3 ni entre 4, es decir, entre dos divisores muy empleados por su sencillez. La incorporación de dos nuevos símbolos (cifras) daría al sistema de numeración esta ventaja; pero tal innovación sería, sin duda, contraproducente. Perderíamos la utilidad que dio origen a nuestra aritmética que es, la posibilidad de calcular con los dedos de las manos".

Por el contrario, procedía, por uniformidad, pasar también a los decimales en la medición de los arcos, de los minutos y de los grados.

Dicha reforma se intentó realizar en Francia, pero no llegó a implantarse. No había otro, aparte de Laplace que fuera un ardiente partidario de esta reforma. Su célebre libro "Exposición de un sistema del mundo" sucesivamente realiza la subdivisión decimal de los ángulos; llama grado, no a la noventava, sino a la centésima parte de un ángulo recto, minuto a la centésima parte de un grado, etc. Inclusive, Laplace emitió su opinión sobre la subdivisión decimal de las horas y de los minutos. "La uniformidad del sistema de medidas, requiere que el día esté dividido en 100 horas, la hora en 100 minutos, el minuto en 100 segundos" escribió el eminente geómetra francés.

Se ve, por consiguiente, que la docena tiene por sí misma, una larga historia, y que el número 12, no sin fundamento se encuentra en la galería de las maravillas numéricas. Por el contrario su contiguo, el número 13, figura aquí no porque sea notable, sino más bien por no serlo, aunque precisamente se emplea por una gloria sombría: ¿no es extraordinario que no habiendo nada que distinga al número, pudiera éste llegar a ser "peligrosa" para las gentes supersticiosas?.

La forma en que fue propagada esta superstición (que se originó en la antigua Babilonia) es evidente por el hecho de que en la época del régimen zarista, en el dispositivo del tranvía eléctrico en Petersburgo no se decidieron a introducir la ruta número 13, omitiéndola y pasando a la número 14. Las autoridades pensaban que el público no querría viajar en vagones con tal "siniestro" número. Es curioso que en Petersburgo los alojamientos que atendían 13 cuartos, estuvieran solitarios... En los hoteles, generalmente no existía la habitación número 13. Para la lucha contra esta superstición numérica, sin fundamento, en algunas partes de Occidente (por ejemplo, en Inglaterra) se han constituido inclusive "Clubes del número 13" especiales.

En la siguiente vitrina del museo de maravillas aritméticas vemos ante nosotros al número 365.

[Volver](#)

### 3. Número 365

Es notable, ante todo, porque denomina el número de días en el año. Además, en la división entre 7 da, en el residuo, 1: por ser un residuo tan insignificante, esta propiedad del número 365 adquiere un gran significado para nuestro calendario de siete días.

Otra propiedad del número 365 no relacionada con el calendario, es

$$365 = 10 \times 10 + 11 \times 11 + 12 \times 12,$$

es decir, que el número 365 es igual a la suma de los cuadrados de tres números consecutivos, empezando por el 10:

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 100 + 121 + 144 = 365.$$



Figura 27. Viñeta del famoso cuadro del artista Bogdánov-Bielski, titulado "Un Problema Difícil"

Pero además, es igual a la suma de los cuadrados de los dos siguientes números, 13 y 14:

$$13^2 + 14^2 = 169 + 196 = 365.$$

En esta propiedad del número 365 se basa el conocido problema de S. A. Rachinsky que inspiró el famoso cuadro de Bogdánov-Bielsky. "problema difícil" (figura 27)

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365} =$$



Pocos números de esta índole reúnen en nuestra galería de maravillas aritméticas.

[Volver](#)

#### 4. Tres Nueves

En la siguiente vitrina está, expuesto el mayor de todos los números de tres cifra: el 999. Dicho número, sin duda es mucha más extraordinario que su imagen volcada 666, el famoso "número bestial" del Apocalipsis que ha inspirado un temor absurdo entre algunas gentes supersticiosas que, conforme a las propiedades aritméticas nada hay que lo distinga de los demás números.



*Figura 28. Un número por el cual es fácil multiplicar*

Una propiedad interesante del número 999 se manifiesta en su multiplicación con cualquier otro número de tres cifras. Entonces se obtiene un producto de seis cifras: sus tres primeras cifras constituyen el número multiplicado, disminuido de una unidad, y las tres cifras restantes (inclusive la última) son el "complemento" al 9, de las primeras. Por ejemplo:

573:

$$573 \times 999 = 572\ 427$$

Basta, solamente, echar una ojeada al siguiente renglón, para entender el origen de esta particularidad:

$$573 \times 999 = 573 \times (1000-1) = 573\ 000 - 573 = 572\ 427$$

Conociendo esta particularidad, podemos multiplicar "instantáneamente" cualquier número de tres cifras por 999:

$$\begin{aligned} 917 \times 999 &= 916\ 083, \\ 509 \times 999 &= 508\ 491, \\ 981 \times 999 &= 980\ 019 \end{aligned}$$


Y puesto que  $999 = 9 \times 111 = 3 \times 3 \times 3 \times 37$ , se pueden, otra vez con la rapidez de un rayo, escribir colonias enteras de números de seis cifras, múltiplos de 37; no conocidas las propiedades del número 999, naturalmente no se está en situación de hacer esto. Hablando brevemente, se pueden organizar ante profanos, pequeñas funciones de "multiplicación y división instantáneas".

[Volver](#)

#### 5. El Número de Scheherazada

El que sigue en turno es el número 1001, el célebre número de Scheherazada. Pocos sospechan, probablemente, que en la denominación misma de una colección de cuentos encantados árabes se

encienda una especie de maravilla, que podría exaltar la imaginación del sultán del cuento, no en menor grado que algunas otras maravillas de Oriente, si él hubiera sido capaz de interesarse por las maravillas aritméticas.



*Figura 29. El número de Scheherazada*

¿Qué tan notable es el número 1001? En aspecto, al parecer es muy ordinario. Inclusive, no pertenece al escogido orden de los llamados números "primos". Dicho número es divisible entre 7, 11 y 13, es decir, entre: tres números primos consecutivos, el producto de los cuales resulta ser el mencionado número. Pero la maravilla no consiste en que el número  $1001 = 7 \times 11 \times 13$ , ya que aquí no hay nada de mágico. Lo mas notable es que al multiplicar un número de tres cifras por dicho número, se obtiene un resultado que consiste del mismo número multiplicado, sólo que escrito dos veces, por ejemplo:

$$\begin{aligned} 873 \times 1001 &= 873\ 873, \\ 207 \times 1001 &= 207\ 207, \end{aligned}$$

Y aunque esto era de esperarse, puesto que

$$873 \times 1001 = 873 \times 1000 + 873 = 873\ 000 + 873,$$

aprovechando la señalada propiedad "del número de Scheherazada" se pueden lograr resultados completamente inesperados, por lo menos para el hombre no preparado.

Ahora, aclaremos en que forma.

Se puede sorprender a un grupo de camaradas no iniciados en los misterios aritméticos, con el siguiente truco, Supóngase que alguno escribe en un pedazo de papel, en secreto, el número de tres cifras que desee, y que enseguida le agrega el mismo número.

Se obtiene un número de seis cifras que se compone de tres cifras repetidas. Se le propone al mismo camarada o a su vecino dividir este número, en secreto, entre 7; además, con anticipación se predice que en la división no se obtendrá residuo. El resultado se transmite al nuevo vecino, quien de acuerdo con la proposición, lo divide entre 11, y aunque no se conoce el dividendo, uno puede afirmar que también ese número se divide sin residuo. El resultado obtenido se proporciona al siguiente vecino, al cual se le solicita que divida este número entre 13, y conforme a lo predicho de antemano, la división no dará ningún residuo. El resultado de la tercera división, sin ver el número obtenido se traslada al primer camarada con las palabras:

- *¿Este es el número que Ud. Pensó?*
- *Así es, Ud. acertó, le contestarán sin duda alguna.*

¿Cuál es la clave del truco?

Este bonito truco aritmético, que produce en los no iniciados un efecto de magia, se explica en una forma muy sencilla: recuérdese que el agregar a un número de tres cifras el propio número, significa multiplicarlo por 1001, es decir, por el producto  $7 \times 11 \times 13$ . El número seis cifras que obtiene nuestro camarada después de agregar al número dado el propio número, deberá, por esta razón, dividirse exactamente entre 7, entre 11 y entre 13; y como consecuencia de la división, consecutivamente, entre estos tres números (es decir, entre su producto 1001) se deberá naturalmente, obtener otra vez el número pensado.

La realización del truco se puede variar conforme los deseos en tal forma, que se tenga la posibilidad de encontrar el número enigmático que se obtiene en el total de los cálculos. Es sabido que el número de seis cifras sobre el cual se comienzan a hacer los cálculos, es igual al producto

$$(\text{número pensado}) \times 7 \times 11 \times 13.$$

Por tal razón, si se pide dividir el número de seis cifras, primero entre siete, después entre 11, luego entre el número pensado entonces, con seguridad se puede encontrar como total final de todas las divisiones al 13.

Repitiendo el truco, se pide realizar las divisiones en otro orden: al principio entre 11, después entre el número pensado y entre 13. La última división deberá dar 7 como cociente. O al principio entre 13, después entre el número pensado, y luego entre 7; el total final es 11.

[Volver](#)

## 6. El Número 10101

Después de lo indicado sobre el número 1001, ya no será una sorpresa ver al número 10101 en las vitrinas de nuestra galería. Se adivina a qué propiedad, precisamente, está obligado este número por tal honor. El, como el número 1001, da un resultando sorprendente en la multiplicación, pero no de números de tres cifras, sino de dos cifras; todo número de dos cifras, multiplicado por 10101, da como resultado el propio número, escrito tres veces.



Figura 30. Un número que se presta para trucos

Por ejemplo:

$$\begin{aligned} 73 \times 10\ 101 &= 737\ 373 \\ 21 \times 10\ 101 &= 212\ 121. \end{aligned}$$

La causa se aclara por el siguiente renglón:

$$73 \times 10101 = 73 (10000 + 100 + 1) = 730000 + 7300 + 73$$

¿ Con ayuda de este número se pueden hacer trucos de adivinación no habitual, como con el número 1001?

Sí se puede. Aquí es posible inclusive, disponer de un truco más variado, si se tiene en cuenta que 10101 es producto de cuatro números primos:

$$10101 = 3 \times 7 \times 13 \times 37.$$

Proponiendo a un camarada pensar un número de dos cifras, a un segundo se le pide agregarle el propio número, a un tercero agregar el propio número una vez más. A un cuarto se le pide dividir el número de seis cifras obtenido, entre 7 por ejemplo; un quinto camarada deberá dividir el cociente obtenido entre 3; un sexto divide lo que se obtuvo entre 37 y, finalmente, un séptimo divide este resultado entre 13; las cuatro divisiones se realizan sin residuo. El resultado de la última división se transmite al primer camarada: éste es, precisamente, el número pensado por él. En la repetición del truco se puede introducir cierta variedad, empleando cada vez nuevos divisores. A saber, en lugar de los cuatro multiplicadores  $3 \times 7 \times 13 \times 37$ , se pueden tomar los siguientes grupos de tres multiplicadores:

$$\begin{aligned} &21 \times 13 \times 37; \\ &7 \times 39 \times 37 \\ &3 \times 91 \times 37 \\ &7 \times 13 \times 111. \end{aligned}$$

Este truco es fácil de modificar en forma semejante a como fue explicado en el caso anterior (en el truco con el número 1001).

El número 101001 es, quizás aun más sorprendente que el número encantado de Scheherazada, aunque también sea menos conocido en cuanto a sus propiedades singulares. Sobre él se escribió además, ya doscientos años antes, en la "Aritmética" de Magnitski, en el capítulo donde se proporcionan ejemplos de multiplicación, "con una cierta sorpresa". Dicho número, con mayor razón, debe incluirse en nuestra colección de maravillas aritmética.

[Volver](#)

## 7. El Número 10001

Con este número se pueden también hacer trucos a la manera de los anteriores, aunque quizás no tan variadas.



*Figura 31. Otro número que se presta para trucos*

Es que dicho número representa en sí, el producto de dos números primos solamente:

$$10\ 001 = 73 \times 137.$$

Tengo confianza en que el lector, después de todo lo indicado arriba, se dará cuenta de cómo se aprovecha eso para la realización de las operaciones aritméticas "con sorpresa".

[Volver](#)

## 8. Seis Unidades

En la siguiente vitrina vemos una nueva maravilla del museo de curiosidades aritméticas el número que consiste de seis unidades. En virtud del conocimiento de las propiedades mágicas del número 1001, simultáneamente nos damos cuenta de que

$$111111 = 111 \times 1001.$$



*Figura 32. Número útil para la adivinación*

Pero  $111 = 3 \times 37$ , y  $1001 = 7 \times 11 \times 13$ . De aquí se sigue que nuestro nuevo fenómeno numérico, que se compone solamente de unidades, representa en sí, el producto de cinco multiplicadores primos. Combinando estos cinco multiplicadores en todas las formas posibles, en dos grupos, obtenemos 15 pares de multiplicadores que dan como producto uno y el mismo número 111111:

$$\begin{aligned} 3 \times (7 \times 11 \times 13 \times 37) &= 3 \times 37037 = 111111 \\ 7 \times (3 \times 11 \times 13 \times 37) &= 7 \times 15873 = 111111 \\ 11 \times (3 \times 7 \times 13 \times 37) &= 11 \times 10101 = 111111 \\ 13 \times (3 \times 7 \times 11 \times 37) &= 13 \times 8547 = 111111 \\ 37 \times (3 \times 7 \times 11 \times 13) &= 37 \times 3003 = 111111 \\ (3 \times 7) \times (11 \times 13 \times 37) &= 21 \times 5291 = 111111 \\ (3 \times 11) \times (7 \times 13 \times 37) &= 33 \times 3367 = 111111 \end{aligned}$$

Se puede, en ese caso, poner a un grupo de 15 camaradas el trabajo de multiplicación y, aunque cada uno multiplicara un distinto par de números, todos obtendrían uno y el mismo resultado original: 111111.

El mismo número 111111 es útil también, para la adivinación de números pensados, a semejanza de los medios; usados con los números 1001 y 10101. En el caso dado se propone pensar un número de una cifra, y repetirlo 6 veces. Como divisores pueden servir aquí, cinco números primos: 3, 7, 11, 13, 37 y las combinaciones obtenidas de ellos: 21, 33, 39, etc. Esto proporciona la posibilidad de variar en extremo la realización del truco.

Por ejemplo, del número 111111 el lector ve cómo se quede emplear, para los trucos aritméticos, un número que se componga de puras unidades, si se descompone en factores. Para fortuna de los aficionados a semejantes trucos, algunos números, de tal sistema, no son primos, sino compuestos.

De los primeros 17 números de esta especie solamente los dos menores, 1 y 11, son primos, los restantes son compuestos. He aquí cómo se descomponen en factores primos, los primeros diez de los números compuestos de este sistema.

$$111 = 3 \times 37$$

1.111	=	11 x 101
11.111	=	41 x 271
111.111	=	3 x 7 x 11 x 13 x 37
1.111.111	=	239 x 4649
11.111.111	=	11 x 73 x 101 x 137
111.111.111	=	9 x 37 x 333 667
1.111.111.111	=	11 x 41 x 271 x 9091
111.11.111.111	=	21649 x 513 239
111.111.111.111	=	3 x 7 x 11 x 13 x 87 x 101 x 9901

No todos los números aquí dados son convenientes para la adivinación.

Pero números de 3, 4, 5, 6, 8, 9 y 12 unidades son más o menos útiles para este objeto. Ejemplos de su uso para adivinación, se darán al final del siguiente capítulo.

[Volver](#)

### 9. Pirámides Numéricas

En las siguientes vitrinas de la galería admiramos notabilidades numéricas de una especie muy particular: con semejanza a pirámides compuestas de números. Consideremos más de cerca a la primera de ellas (fig. 33).



Figura 33. Primera pirámide numérica

¿Cómo explicar estos resultados singulares de la multiplicación?

Para comprender esta rara singularidad, tomemos como ejemplo cualquiera de las filas intermedias de nuestra pirámide numérica:  $123456 \times 9 + 7$ . En lugar de la multiplicación por 9, se puede multiplicar por  $(10-1)$ , es decir, agregar el 0 a la derecha y restar el multiplicando:

$$123456 \times 9 + 7 = 1234560 + 7 - 123456 = 1.111.111$$

Basta echar una ojeada sobre la última substracción para comprender por qué se obtiene un resultado que consiste solamente de unidades.

Podemos también explicar esto, partiendo de otros razonamientos. Para que un número de la forma  $12345\dots$  se convierta en un número de la forma  $1111\dots$ , es necesario restar 1 a la

segunda de sus cifras, 2 a la tercera, 3 a la cuarta, 4 a la quinta y así sucesivamente; en otras palabras, restar de él el mismo número de la forma 12345 ... privado de su última cifra, es decir disminuido 10 veces y carente previamente de su última cifra.

Ahora, es comprensible que para la obtención del resultado buscado es necesario multiplicar por 10 nuestro número y agregarle la cifra que sigue, en calidad de última cifra, y restar al resultado el número original (y multiplicar por 10 y restar el multiplicando quiere decir, multiplicar por 9). En forma análoga se explica la formación de la siguiente pirámide numérica (fig. 34), que se obtiene en la multiplicación de una determinada serie de cifras por 8 y la adición de cifras que consecutivamente aumentan.

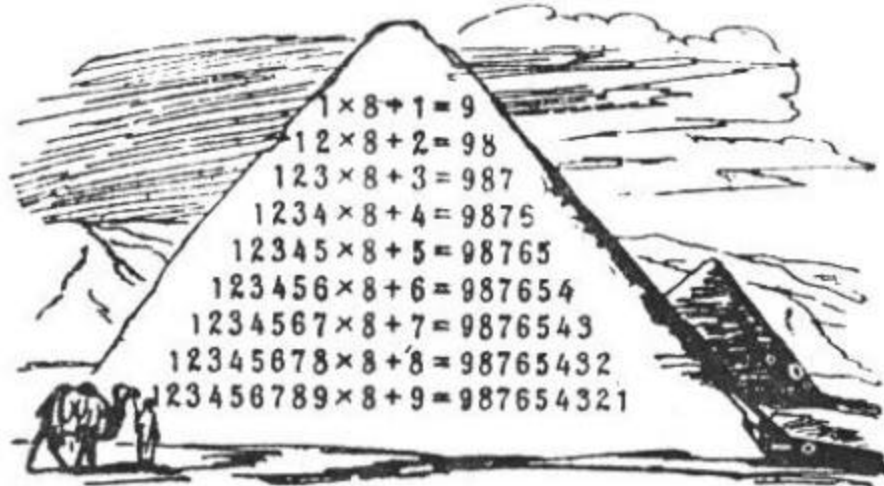


Figura 34. Segunda pirámide numérica

Particularmente interesante en la pirámide, es la última fila donde, como resultado de la multiplicación por 8 y la adición del 9, tiene lugar la transformación de la serie natural total de cifras, en dicha serie, pero con una disposición inversa.

Intentemos explicar esta particularidad.

La obtención de los extraños resultados se aclara por el siguiente renglón:

$$12345 \times 9 + 6 = 111111^6$$

$$12\ 345 \times 8 + 5 = 98765$$

es decir

$$12345 \times (9 - 1) \times 8 + 5 + 1 - 1 = 12345 \times 9 - 12345 - 1 = 111111 - 12\ 316.$$

Pero restando del número 111111 el número 12346 compuesto de una serie de cifras crecientes, obtendremos, como es fácil de comprender, una serie de cifras decrecientes: 98765.

He aquí, finalmente, la tercera pirámide numérica, que también requiere explicación (fig. 35).

<sup>6</sup> Por qué  $12345 \times 9 + 6$  da precisamente 111111, fue mostrado en la consideración de la pirámide anterior.

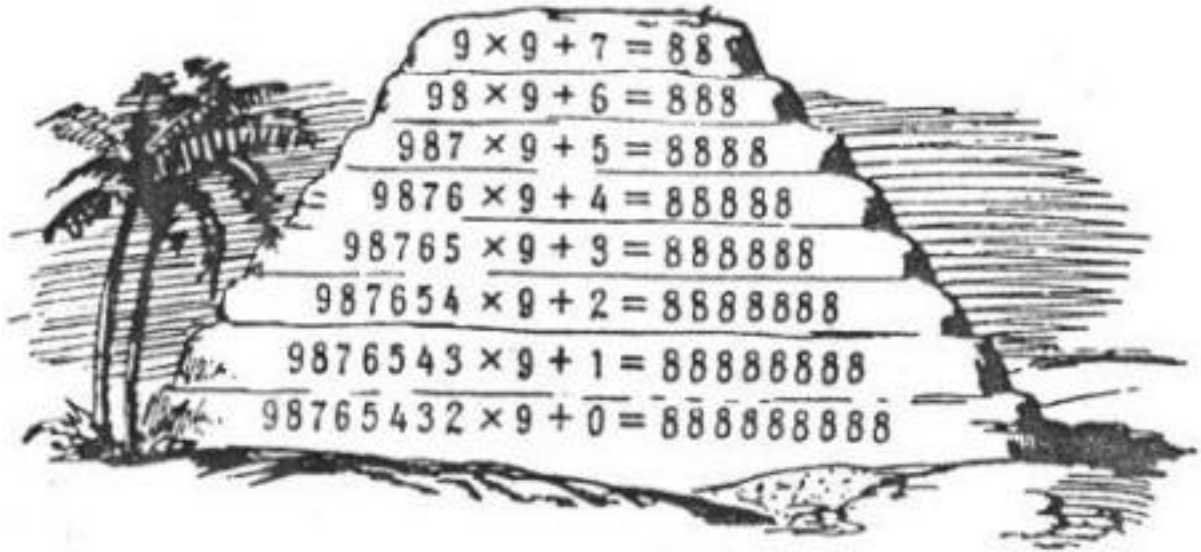


Figura 35. Tercera pirámide numérica

Esta pirámide es una consecuencia directa de las dos primeras. La relación se establece muy fácilmente. De la primera pirámide sabemos ya que, por ejemplo:

$$12345 \times 9 + 6 = 111111.$$

Multiplicando ambos miembros por 8, tenemos:

$$(12\ 345 \times 8 \times 9) + (6 \times 8) = 888888.$$

Pero de la segunda pirámide se sabe que

$$12345 \times 8 + 5 = 98765$$

ó

$$12345 \times 8 = 98760.$$

Vale decir,

$$\begin{aligned}
 888888 &= (12\ 345 \times 8 \times 9) + (6 \times 8) \\
 888888 &= (98\ 760 \times 9) + (5 \times 9) + 3 \\
 888888 &= (98\ 760 + 5) \times 9 + 3 \\
 888888 &= 98\ 765 \times 9 + 3.
 \end{aligned}$$

Se convence uno de que todas estas pirámides numéricas no son tan misteriosas como parece a primera vista. Pero algunos las consideran, sin embargo, no descifradas. Me tocó una vez, verlas impresas en un periódico alemán con una nota: "La causa de tan sorprendente singularidad, hasta el presente todavía nadie se la ha explicado. ..."

[Volver](#)

## 10. Nueve Cifras Iguales

El último renglón de la primera "pirámide" (fig. 33)



$$12\ 345\ 678 \times 9 + 9 = 111.111.111$$

representa un ejemplo de un grupo completo de interesantes curiosidades aritmética en nuestro museo, reunidas en una tabla (ver fig. 36).

12345679	×	9	=	111111111
12345679	×	18	=	222222222
12345679	×	27	=	333333333
12345679	×	36	=	444444444
12345679	×	45	=	555555555
12345679	×	54	=	666666666
12345679	×	63	=	777777777
12345679	×	72	=	888888888
12345679	×	81	=	999999999

*Figura 36.*

¿Dónde está la tal singularidad en los resultados? Tomemos en cuenta que

$$12345\ 678 \times 9 + 9 = (12345\ 678 + 1) \times 9 = 12\ 345\ 679 \times 9.$$

Por esta razón

$$12\ 345\ 679 \times 9 = 111111111.$$

Y de aquí se sigue directamente que

$$12345\ 679 \times 9 \times 2 = 222222222$$

$$12345\ 679 \times 9 \times 3 = 333333333$$

$$12345\ 679 \times 9 \times 4 = 444444444$$

[Volver](#)

## 11. Escala Numérica

Es interesante determinar qué se obtiene si el número 111111111, con el cual ahora tenemos que ver, se multiplica por sí mismo. De antemano se puede sospechar que el resultado deberá ser singular, pero ¿cuál es precisamente?

Si se pasee capacidad para dibujar con claridad en la imaginación una serie de cifras, se llegará a encontrar el resultado que nos interesa, aun sin recurrir a los cálculos sobre el papel. En esencia, aquí la cuestión conduce solamente a una disposición adecuada de los productos parciales,

porque al multiplicar se hace solamente de unidad por unidad. La adición de los productos parciales lleva a un sencillo cálculo de unidades<sup>7</sup>. He aquí el resultado de esta multiplicación, singular en su especie (en la realización de la cual no se llega a recurrir a la operación de multiplicación):

$$\begin{array}{r}
 \phantom{111111111} \\
 \phantom{11111111} \\
 \phantom{1111111} \\
 \phantom{111111} \\
 \phantom{11111} \\
 \phantom{1111} \\
 \phantom{111} \\
 \phantom{11} \\
 \phantom{1} \\
 \times 111111111 \\
 \hline
 111111111 \\
 111111111 \\
 111111111 \\
 111111111 \\
 111111111 \\
 111111111 \\
 111111111 \\
 111111111 \\
 111111111 \\
 111111111 \\
 \hline
 12345678987654321
 \end{array}$$

Las cifras de este resultado disminuyen simétricamente, a partir del centro, en ambas direcciones. Aquellos lectores que se hayan cansado de la revista de las maravillas numéricas, pueden abandonar aquí la "galería" y pasar a las siguientes secciones en donde se muestran trucos y están presentados los gigantes y enanos numéricos: deseo señalar que ellos pueden suspender la lectura de este capítulo y pasar al siguiente. Pero quien todavía desee ponerse al corriente de algunas notabilidades del mundo de los números, lo invito a visitar conmigo una pequeña serie de vitrinas cercanas.

Las maravillas numéricas sobre las cuales se hablará ahora reclaman del lector, el conocimiento de las llamadas fracciones periódicas infinitas. Aquellos lectores que no estén al corriente de ellas, les propongo transformar las siguientes fracciones ordinarias; en decimales, conforme al método bien conocido:

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{3}, \frac{1}{11}$$

Es fácil persuadirse de que las dos primeras fracciones, al convertirse en decimales, dan un número finito de dos y tres cifras respectivamente.

Al convertir en decimales las fracciones restantes, se obtienen series infinitas de cifras que se repiten en un orden determinado:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{3} &= 0.3333333\dots \\
 \frac{1}{11} &= 0.090909090909\dots
 \end{aligned}$$

<sup>7</sup> En el sistema binario de numeración, como ya fue explicado (ver Cap IV) todas las multiplicaciones son, precisamente de tal especie.

Tales fracciones se denominan periódicas, y el grupo de cifras que se repite en ellas se llama periodo.

[Volver](#)

## 12. Anillos Mágicos

¡Qué extraños anillos están expuestos en la siguiente vitrina de nuestra galería! Ante nosotros (fig. 37) hay tres anillos planos que giran uno con el otro.

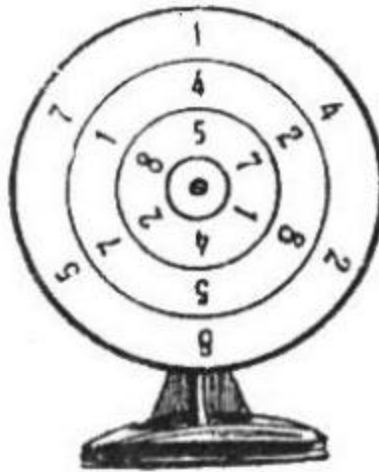


Figura 37. Anillos numéricos giratorios

En cada anillo están escritas seis cifras, en uno y el mismo orden, que forman el número: 142857. Los anillos poseen la propiedad admirable siguiente: en cualquier forma en que sean girados, en la adición de dos números escritos sobre ellos (contando a partir de cualquier cifra en la dirección de giro de las manecillas del reloj), obtenemos en todos los casos el mismo número de seis cifras (en general el resultado será de seis cifras) ¡solamente que algo adelantado! (ver fig. 37). En la posición que se representa en la fig. 37, obtenemos en la adición de los dos anillos exteriores.

$$\begin{array}{r} 142857 \\ -428571 \\ \hline 571428 \end{array}$$

es decir, otra vez la misma serie de cifras: 142857 solamente las cifras 5 y 7 se han transferido del final al principio.

En otras disposiciones de los anillos, relativas de uno con respecto a otro, tenemos los casos:

$$\begin{array}{r} 285714 \\ -571428 \\ \hline 857142 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 714285 \\ -142857 \\ \hline 857142 \end{array}$$

Y así sucesivamente.

La excepción lo constituye el caso en que en el resultado se obtiene 999999:

$$\begin{array}{r} 714285 \\ -285714 \\ \hline 999999 \end{array}$$

(La causa de otras desviaciones respecto de la regla indicada, el lector la podrá captar cuando termine de leer este apartado).

Además, esa misma serie de cifra, en idéntica secuencia la obtenemos también en la substracción de los números escritos en los anillos.

Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 428571 \\ -142857 \\ \hline 285714 \end{array} \quad \begin{array}{r} 571\ 128 \\ -285\ 714 \\ \hline 285\ 714 \end{array} \quad \begin{array}{r} 714285 \\ -142857 \\ \hline 571428 \end{array}$$

La excepción la constituye el caso en que son puestas en coincidencia cifras idénticas; por supuesto, la diferencia es igual a cero.

Pero esto no es todo. Al multiplicar el número 142857 por 857 por 2, 3, 4, 5 ó por 6, se obtiene otra vez la misma serie de cifras, pero desplazada en una disposición circular, en una o en varias cifras:

$$\begin{aligned} 142\ 857 \times 2 &= 285\ 714 \\ 142\ 857 \times 3 &= 428\ 571 \\ 142\ 857 \times 4 &= 571\ 428 \\ 142\ 857 \times 5 &= 714\ 285 \\ 142\ 857 \times 6 &= 857\ 142 \end{aligned}$$

¿Qué tanto están condicionadas estas enigmáticas particularidades de nuestro número?

Damos con el camino de la clave, si prolongamos un poco la última tabla y probamos multiplicar nuestro número por 7: como resultado se obtiene 999999. Vale decir, el número 142 857 no es otra cosa que la séptima parte de 999999 y, por consiguiente, la fracción  $142857/999999 = 1/7$ . En efecto, si se transforma  $1/7$  en fracción decimal se obtiene:

$$1/7 = 0.142\ 857\dots$$

es decir

$$1/7 = 0.(142\ 857)$$

Nuestro enigmático número es el periodo de una fracción periódica infinita que se obtiene en la transformación de  $1/7$  en decimal. Es comprensible ahora, por qué en la duplicación, triplicación,

etc. de este número se produce solamente una nueva colocación de un grupo de cifras en otro lugar. En efecto, la multiplicación de este número por 2 lo hace igual a  $2/7$  y por lo tanto, equivalente a la transformación en fracción decimal, ya no de  $1/7$ , sino de  $2/7$ . Empezando a transformar la fracción  $2/7$  a decimal, se observa que la cifra 2 es uno de aquellos restos que ya obtuvimos en la transformación de  $1/7$ : es evidente que deberá repetirse la precedente serie de cifras del cociente, pero empezando éste con otra cifra; en otras palabras, deberá obtenerse el mismo periodo, pero sólo que algunas de sus cifras iniciales se encuentran al final. Lo mismo se produce, también en la multiplicación por 3, por 4, 5, y 6, es decir, por todos los números que se obtienen en los restos. En la multiplicación por 7 deberemos obtener la unidad, o lo que es lo mismo 0.9999...

Los interesantes resultados de la adición y la substracción de los números, en los anillos hallan explicación en el hecho de que 142857 es el período de la fracción igual  $1/7$ . En efecto, ¿qué hacemos, propiamente, girando el anillo en unas cuantas cifras?. Pasemos el grupo de cifras del principio al final, es decir, de conformidad con lo indicado, multipliquemos el número 142857 por 2, 3, 4, etc. Por lo tanto, todas las operaciones de adición y substracción de los números escritos en los anillos, llevan a la adición y substracción de las fracciones las  $1/7$ ,  $2/7$ ,  $3/7$  y así sucesivamente. Como, resultado debemos obtener, naturalmente fracciones de un séptimo, es decir, de nuevo nuestra serie de cifras 142857 en una u otra disposición circular. De aquí es necesario excluir solamente el caso en que se sumen, tales números de las fracciones de un séptimo, que en total den la unidad o más que 1.

Pero precisamente los últimos casos no se excluyen totalmente: ellos dan un resultado en verdad, no idéntico a los considerados pero fundamentalmente de acuerdo con ellos. Consideremos atentamente qué deberá obtenerse de la multiplicación de nuestro enigmático número con multiplicaciones mayores que 7, es decir por 8, 9, etc.

El multiplicar 142857 por 8, por ejemplo, lo podemos hacer así: multiplicar inicialmente por 7, y el producto (es decir, a 999999) agregar nuestro número:

$$142\ 857 \times 8 = 142\ 857 \times 7 + 142\ 857 = 999999 + 142\ 857 =$$

$$1000\ 000 - 1 - 142\ 857 = 1000\ 000 + (142\ 857 - 1).$$

El resultado final 1.142.856 se distingue del multiplicando 142857 únicamente en que hay antepuesta una unidad, y la última cifra está disminuida por una unidad. De acuerdo a una regla similar se compone el producto de 142857 por todo número mayor que 7, como es fácil ver en los siguientes renglones:

$$\begin{array}{lll} 142\ 857 \times 8 & = (142\ 857 \times 7) + 142\ 857 & = 1\ 142\ 856 \\ 142\ 857 \times 9 & = (142\ 857 \times 7) + (142\ 857 \times 2) & = 1\ 285\ 713 \\ 142\ 857 \times 10 & = (142\ 857 \times 7) + (142\ 857 \times 3) & = 1\ 428\ 570 \\ 142\ 857 \times 16 & = (142\ 857 \times 7 \times 2) + (142\ 857 \times 2) & = 2\ 285\ 712 \\ 142\ 857 \times 39 & = (142\ 857 \times 7 \times 5) + (142\ 857 \times 4) & = 5\ 571\ 423 \end{array}$$

La regla más general es la siguiente: en la multiplicación de 142857 por cualquier multiplicador, es necesario multiplicar solamente por el residuo de la división del multiplicador entre 7; se antepone a este producto el número que indica la cantidad de sietes que existen en el

multiplicador ese mismo número se subtrae al resultado<sup>8</sup>. Supóngase que deseamos multiplicar 142857 por 88. El multiplicador 88 en la división entre 7 da 12 en el cociente, el resultado de las operaciones indicadas es:

$$12571428 - 12 = 12571416$$

De la multiplicación  $142857 \times 365$  obtenemos (puesto que 365 en la división entre 7 da en el cociente 52 y como resto 1):

$$52\ 142\ 857 - 52 = 52\ 142\ 805$$

Aprendiendo esta sencilla regla y recordando los resultados de la multiplicación de nuestro singular número por los multiplicadores del 2 al 6 (que es muy difícil, siendo necesario tan sólo, recordar con qué cifras comienzan), se puede sorprender a los no iniciados con la rapidez de la multiplicación de un número de seis cifras; y para no olvidar este número sorprendente, observemos que él procede de  $1/7$ , o lo que es lo mismo de  $2/14$ : tenemos las tres primeras cifras, de nuestro número: 142. Las tres restantes se obtienen por substracción de las tres primeras de 1999:

$$\begin{array}{r} 999 \\ -142 \\ \hline 857 \end{array}$$

Ya hemos tenido que ver con tales números precisamente cuando nos pusimos al corriente de las propiedades del número 999. Recordando lo indicado allí, nos, damos cuenta de que el número 142857 es, evidentemente, el resultado de la multiplicación de 143 por 999:

$$142857 = 143 \times 999.$$

Pero  $143 = 13 \times 11$ . Recordando lo observado anteriormente sobre el número 1001, igual a  $7 \times 11 \times 13$ , estamos en condiciones, sin efectuar operaciones, de predecir qué deberá obtenerse de la multiplicación  $142857 \times 7$ :

$$142857 \times 7 = 143 \times 999 \times 7 = 999 \times 11 \times 13 \times 7 = 999 \times 1001 = 999999$$

(todas estas transformaciones, claro está, se pueden efectuar mentalmente).

[Volver](#)

### 13. Una Familia Fenomenal

El número 142857 que acabamos de tratar es uno de los miembros de una familia completa de números que poseen las mismas propiedades. He aquí uno de tales números: 0 588 235 294 117 647 (el 0 antepuesto es necesario). Si se multiplica este número por 4, por ejemplo, obtenemos aquella misma serie de cifras, sólo que las cuatro primera cifras estarán colocados al final:

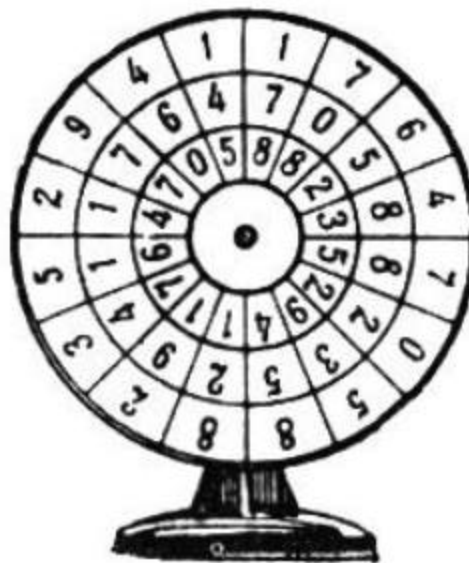
<sup>8</sup> Si el multiplicador es múltiplo de siete, el resultado es igual al número 999999, multiplicado por la cantidad de setes en el multiplicador; tal multiplicación se efectúa mentalmente en forma sencilla. Por ejemplo,  $142857 \times 28 = 999999 \times 4 = 4000000 - 4 = 3999996$

$$0\ 588\ 235\ 294\ 117\ 647 \times 4 = 2\ 352\ 941\ 176\ 470\ 588.$$

Disponiendo las cifras de este número sobre varios anillos móviles (fig. 38) como en el caso anterior, en la adición de los números de dos anillos obtendremos el mismo número, sólo que desplazado en el orden circular:

$$\begin{array}{r} 0\ 588\ 235\ 294\ 117\ 647 \\ + 2\ 352\ 941\ 176\ 470\ 588 \\ \hline 2\ 941\ 176\ 470\ 588\ 235 \end{array}$$

Naturalmente, las tres series que se disponen en los anillos, son idénticas:



*Figura 38.*

De la substracción de los números de dos anillos, se obtiene otra vez el mismo círculo de cifras:

$$\begin{array}{r} 2\ 352\ 941\ 176\ 470\ 588 \\ - 0\ 588\ 235\ 294\ 117\ 647 \\ \hline 1\ 764\ 705\ 882\ 352\ 941 \end{array}$$

Finalmente, este número, como también el considerado antes, consiste de dos mitades: las cifras de la segunda mitad son el complemento a 9 de las cifras de la primera mitad.

Tratemos de encontrar la clave de todas estas particularidades.

No es difícil darse cuenta en qué forma la serie numérica dada ha resultado ser un pariente cercano del número 142 857; el número del anillo anterior representa en sí, el período de una fracción infinita igual a  $1/7$ ; el nuevo número es, probablemente, el período de cualquier otra fracción: y en efecto, nuestra larga serie de cifras no es otra cosa, que el período de la fracción infinita que se obtiene de la transformación de la fracción simple  $1/17$  a fracción decimal:

$$1/17 = 0(0\ 588\ 235\ 294\ 117\ 647).$$

He aquí por qué, en la multiplicación de este número por tus multiplicadores del 1 al 16, se obtiene aquella misma serie de cifras en la cual, solamente una o varias cifras iniciales están transferidas al final del número. Y por el contrario, al transferir una o varias cifras de la serie, del comienzo al final, aumentamos el número en varias veces (del 1 al 16 inclusive). Sumando dos anillos girados, uno con relación al otro, producimos la adición de dos números multiplicados, por ejemplo, por tres y por diez, y naturalmente, se obtiene el mismo anillo de cifras, debido a que la multiplicación por  $3 + 10$ , es decir, por 13, motiva solamente una transferencia insignificante del grupo de cifras en la disposición circular.

Con una cierta posición de los anillos se obtienen, sin embargo, sumas que difieren un poco de la serie inicial. Si, por ejemplo, giramos un anillo en tal forma que se sume un número multiplicado por seis con uno multiplicado por 15, en la suma se deberá obtener un número multiplicador por  $6 + 15 = 21$ . Y tal producto, como es fácil darse cuenta, es algo distinto del producto por un multiplicador menor que 17. En efecto, nuestro número, período de una fracción igual a  $1/17$ , al multiplicarse por 17 deberá dar 16 veces (es decir, tantos como cifras existan en el período de nuestra fracción periódica), o el 1 con 17 ceros menos 1. Por esta razón, en la multiplicación por 21, es decir por  $4 + 17$ , deberemos obtener nuestro número cuadruplicado antepuesto al cual se halla el 1, y del orden de las unidades se resta 1. El número cuadruplicado empieza con las cifras que se obtienen en la transformación de la fracción siempre  $4/17$  en fracción decimal:

$$4 : 17 = 0.23 \dots$$

El orden de las cifras restantes es conocido: 5291... Vale decir, nuestro número, multiplicado por 21 será:

$$2\ 352\ 941\ 176\ 470\ 587.$$

Lo mismo se obtiene de la adición de los círculos de cifras con una disposición correspondiente. En la substracción de los anillos numéricos de tal caso, no se puede.

De números semejantes a los dos con que hemos entablado conocimiento, existe una infinidad. Ellos constituyen una familia completa, puesto que están ligados por un origen común: a partir de la transformación de las fracciones simples en fracciones decimales infinitas. Pero no todo período de una fracción decimal tiene la interesante propiedad, anteriormente considerada, de dar en la multiplicación una transferencia circular de cifras. Sin entrar en sutilezas de la teoría, observamos que esto tiene lugar, solamente para aquellas fracciones en que el número de cifras de su período es menor en una unidad, al denominador de la fracción simple correspondiente. Así, por ejemplo

$1/7$  da en el período 6 cifras  
 $1/17$  da en el período 16 cifras  
 $1/19$  da en el período 13 cifras  
 $1/23$  da en el período 22 cifras  
 $1/29$  da en el período 28 cifras



Si la condición indicada ahora (relativa al número de cifras del periodo) no se satisface, entonces el correspondiente período da un número que no pertenece a la interesante familia numérica que nos ocupa. Por ejemplo,  $1/13$  da una fracción decimal con seis (y no con 12) cifras en el período:

$$1/13 = 0.076923$$

Multiplicando por 2, obtenemos un número completamente distinto.

$$2/13 = 0.153846$$

¿Por qué? Porque entre los restos de la división  $1/13$  no estaba el número 2. De los diferentes restos existen tantos, como cifras hay en el periodo, es decir, 6; de los diversos multiplicadores para la fracción  $1/13$  tenemos 12, por consiguiente, no todos los multiplicadores estarán entre los restos, sino únicamente 6. Es fácil darse cuenta de que estos multiplicadores son los siguientes: 1, 3, 4, 9, 10, 12. La multiplicación por estos 6 números da una nueva colocación circular ( $076923 \times 3 = 230769$ ), no siendo así en la multiplicación por los números restantes. Esta es la razón por la cual de  $1/13$  se obtiene un número útil sólo en parte para el "anillo mágico".

[Volver](#)

#### 14. Curiosidades Aritméticas

$$100 = \begin{cases} 91 + \frac{5823}{647} \\ 94 + \frac{1578}{263} \\ 96 + \frac{1428}{357} \end{cases}$$



## *Capítulo Sexto* **Trucos sin Engaños**

Contenido:

1. [El Arte del calculista Hindú](#)
2. [Sin Abrir los Monederos](#)
3. [Adivinar el Numero de Cerillos](#)
4. ["Lectura de Pensamientos" Conforme a Cerillos](#)
5. [Sistema de Pesas Ideal](#)
6. [Predecir la Suma de Números no Escritos](#)
7. [Sorpresa Aparente](#)
8. [División Instantánea](#)
9. [La Cifra Favorita](#)
10. [Adivinar la Fecha de Nacimiento](#)
11. [Una de las "Operaciones Favoritas" de Magnitski](#)
12. [Adivinación de Números](#)
13. [Curiosidades Aritméticas](#)

### **1. El Arte del calculista Hindú**

Los trucos aritméticos son trucos sin engaño, honestos. Aquí no se pretende engañar, ni se trata de adormecer la atención del espectador. Para realizar un truco aritmético no son necesarios ni una milagrosa destreza de manos, ni una sorprendente agilidad de movimientos, ni cualesquiera otras capacidades artísticas que, algunas veces, requieren prácticas de varios años. Todo el secreto del truco aritmético consiste en el estudio minucioso y la utilización de las propiedades interesantes de los números, con un íntimo conocimiento de sus particularidades. Quien conoce la

clave de un truco, se lo representa sencillo y claro, mientras que, para quien desconoce la aritmética, una operación ordinaria le parece, inclusive, una especie de truco.

Antiguamente, cuando la capacidad de efectuar aun las operaciones aritméticas ordinarias con grandes números, conocidas ahora por todo escolar, constituía el arte de unos cuantos, para los demás se mostraba como una capacidad excepcional. En la antigua narración hindú 'Nal y Damaianti'<sup>1</sup> encontramos un eco de tal punto de vista sobre las operaciones aritméticas.

*Nal, que sabía manejar perfectamente caballos, acompañado en una ocasión del calculista virtuosa Ritupern pasó delante del frondoso árbol de Vibitaka. De repente el contador vio a los lejos el árbol Vibitaka de espeso follaje. "Escucha, dijo, en la tierra nadie tiene todos los conocimientos: en el arte de guiar caballos tú eres el primero, en cambio, yo lo soy en el arte de calcular..."*

*Y en demostración de su arte el calculista instantáneamente determinó el número de hojas en el frondoso Vibitaka. Al pedirle Nal, sorprendido, que le confiriera el secreto de mi arte, Ritupern accedió.*

*"...lo que había hecho Ritupern, tal y como le dijo a Nal, consistía en contar las hojas ramas, de Vibitaka, y multiplicar los números..."*

El secreto arte consistía, como puede suponerse, en que el cálculo directo de las hojas, que requiere cierto tiempo y paciencia, se substituía por el cálculo del número de hojas de una sola rama y, por la multiplicación de este número por el número de ramas de cada ramificación, y después por el número de ramificaciones del árbol (suponiendo que todas las ramificaciones se constituían idénticamente por ramas, y las ramas por hojas).

La clave de la generalidad de los trucos aritméticos es tan sencilla como el secreto del "truco" de Ritupern. Basta sólo saber en qué consiste el secreto del truco, e inmediatamente se aprende el arte de realizarlo, a la manera que aprendió el legendario Nal por el sorprendente arte del cálculo rápido. En la base de todo truco aritmético se halla una determinada particularidad interesante de los números, por lo que el conocimiento de trucos semejantes resulta tanto instructivo, como recreativo.

[Volver](#)

## 2. Sin Abrir los Monederos

El prestidigitador esparce sobre la mesa un montón de monedas por la suma de 3 rublos, y presenta el problema: distribuir el dinero en 9 monederos, de tal modo que se pueda pagar cualquier suma hasta 3 rublos, sin abrir los monederos.

Esto puede parecer completamente irrealizable. Pero no se piense que el prestidigitador preparó una trampa a partir del juego de palabras o de su inesperada, interpretación.

---

<sup>1</sup> Traducción libre al ruso de Zhúkovsky. Este episodio, sobre el que se habla adelante, se encuentra en el capítulo VIII de dicho relato.

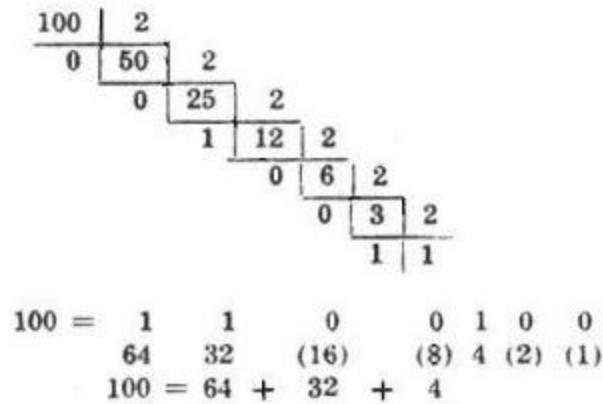


Figura 39.

Obsérvese: el propio prestidigitador se pone a trabajar. Distribuyendo las monedas en los monederos, y sujetando a cada uno, una etiqueta con la designación de la cantidad colocada (ver fig. 39), él propone que se determine cualquier suma que no exceda los 3 rublos. Se nombra la primera que viene a la mente: 2 rublos 69 kopeks. Sin tardanza, el prestidigitador elige y entrega 4 monederos. Al abrirlos se halla:

en uno	64 k
en otro	45 k
en un tercero	1r.28 k
en un cuarto	32 k
Total	2r.69 k

Uno está predispuesto a sospechar del prestidigitador en cuanto al hábil cambio, de monederos, y reclama la repetición del truco. Para esto, se ponen todos los monederos bajo nuestra custodia, y cuando se nombra una nueva suma, por ejemplo, 1 rublo, ó 7 kopeks, ó 2 r. 93 k., aquel indicara rápidamente cuáles de los monederos, que se tienen bajo el brazo se deberán tomar, para que se forme la suma enunciada. A saber:

- Para un rublo, 6 monederos (32 kopeks, 1k., 45k., 16k., 2 k., 4 k.,)
- Para 7 kopeks, 3 monederos (1 k., 2 k., 4 k.)
- Para 2 rublos 93 kopeks, 6 monederos (1r. 28 k., 32 k., 8 k., 45 k., 64 k., 16 k.)

Conforme al deseo del prestidigitador, los monederos resultan siempre adecuados para constituir cualquier suma nombrada (hasta 3 rublos). ¿Cómo se explica esto?

El secreto radica en distribuir el dinero en la siguiente forma: 1 k., 2 k., 4 k., 8 k., 16 k., 32 k., 64 k., 1 r. 28 k. el dinero restante en el último monedero, es decir, 300,

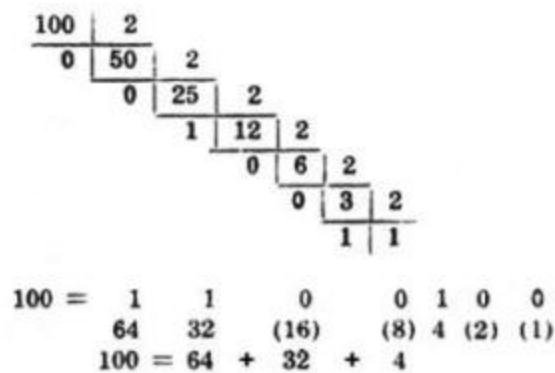
$$(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128) = 300 - 255 = 45 \text{ k.}$$

Con los primeros 8 monederos, como es fácil convencerse, se puede formar cualquier suma desde 1 hasta 255 kopeks; si se da una suma mayor, entonces se entrega el último monedero con 45 kopeks, y la diferencia se forma de los primeros ocho monederos.

Se puede verificar la utilidad de tal agrupamiento de números haciendo bastantes ensayos, y convencerse de que a partir de ellos se puede efectivamente constituir todo número que no exceda de 300. Pero quizá interese también por qué razón la serie de números 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, etc. posee tan extraordinaria propiedad. Es fácil de comprender esto, si se recuerda que los números de nuestra serie representan potencias del número 2:

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^3 \text{ etc}^2$$

y por consiguiente se pueden considerar como órdenes del sistema binario de numeración; y puesto que todo número se puede escribir en el sistema binario, entonces es posible para todo número el que se forme en base a una suma de potencias de 2, es decir, de números de la serie 1, 2, 4, 8, 16, etc. Y cuando se toman monedas para formar, en base a ellos, el contenido del número dado, en esencia, se expresa dicho número en el sistema binario de numeración. Por ejemplo, el número 100 se forma fácilmente, si se le representa en el sistema binario:



Cuadro 26

Recordemos que, en el sistema binario, el primer lugar desde la derecha lo ocupan las unidades, el segundo los doses, el tercero los cuatros, y así sucesivamente.

[Volver](#)

### 3. Adivinar el Numero de Cerillos

La propiedad del sistema binario se puede utilizar también para el siguiente truco: Propóngase a cualquiera, colocar sobre una mesa una caja de cerillos, incompleta y que, en línea con ella y a su izquierda, se coloquen 7 papelillos de forma rectangular. Después, ausentándonos, pidamos que se haga lo siguiente: dejando la mitad de cerillos en la caja, que se traslade la otra mitad al papelillo más próximo; si el número de cerillos es impar, el cerillo excedente se coloca al lado del papelillo. Es necesario dividir en dos partes iguales los cerillos que se encuentran sobre el papelillo (no tocando al que se halla junto): una mitad se coloca en la caja y la otra se pone en el siguiente papelillo; en el caso de un número impar, el cerillo que queda se pone, junto al segundo papelillo. Después se procede en igual forma, restituyendo cada vez, de vuelta a la caja, la mitad de cerillos y la otra mitad poniéndola sobre el siguiente papelillo, sin olvidar colocar un cerillo a un lado cuando se presente un número impar.

<sup>2</sup> Aquellos que estudian álgebra saben que el número 1 se pueda considerar como el 2 elevado al exponente cero.

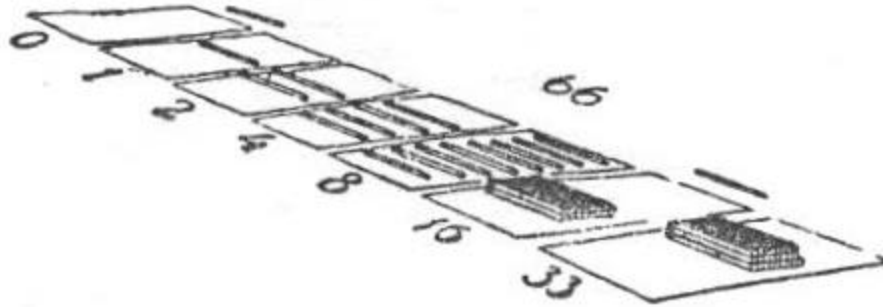


Figura 40. Adivinación del número de cerillos. Acciones sucesivas del que propone

Al final, todos los cerillos, salvo los que se hallan junto a los papelillos, se restituyen a la caja (ver figs. 40 y 41).

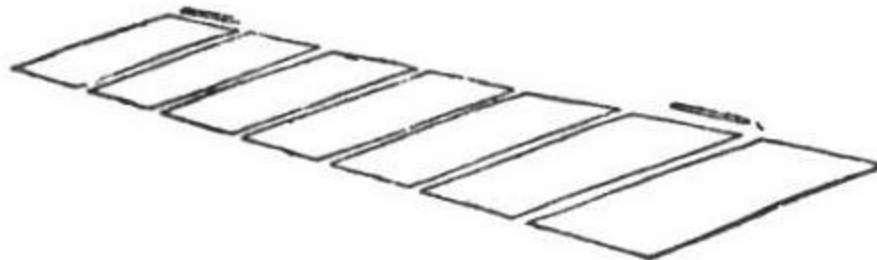


Figura 41. Continuación del truco: aspecto final de los papelillos

Cuando se haya hecho esto, uno se presenta en la habitación y, echando una mirada sobre los papelillos vacíos, nombra el número total de cerillos.

¿Cómo se puede, conforme a los papelillos vacíos y a los singulares cerillos fortuitos, adivinar el número inicial de cerillos en la caja?

Estos papelillos "vacío", en el caso dado, son muy elocuentes: conforme a ellos y a los cerillos singulares se puede literalmente leer el número buscado, porque está escrito, sobre la mesa, en el sistema binario de numeración. Aclaremos esto con un ejemplo.

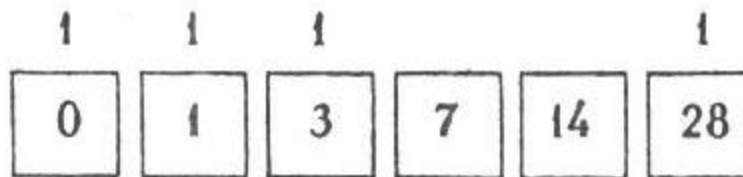


Figura 42. Otro caso de adivinación. Principio del truco

Supóngase que el número de cerillos en la caja es 66. Las operaciones sucesivas con ellos y el aspecto final de los papelillos están mostrados en los esquemas de las Figs. 40 y 41.

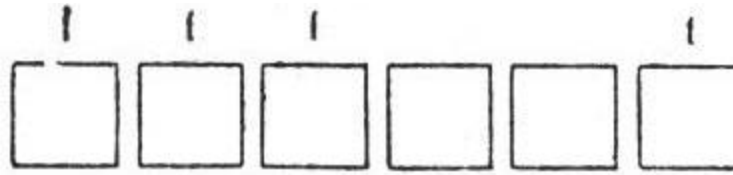


Figura 43. Final del truco

No es difícil darse cuenta de que las operaciones efectuadas con los cerillos, en esencia, son las mismas que hubiésemos realizado de haber querido determinar el número de cerillos de la caja, en el sistema binario de numeración; el esquema final representa directamente este número en el sistema binario si los papelillos vacíos se adoptan como ceros, y los papeles con un cerillo al lado, como unidades. Leyendo el esquema de izquierda a derecha, obtenemos:

1	0	0	0	0	1	0
64	32	16	8	4	2	1

en el sistema decimal:

$$64 + 2 = 66$$

Si hubiera 57 cerillos, los esquemas serían los correspondientes a las figuras 42 y 43. El número buscado, escrito en el sistema binario es:

1	1	1	0	0	1
32	16	8	4	2	1

Y en el sistema decimal:

$$32 + 16 + 8 + 1 = 57.$$

[Volver](#)

#### 4. "Lectura de Pensamientos" Conforme a Cerillos

La tercera variante del mismo truco representa, en sí, un método singular de adivinación de un número pensado, conforme a cerillos. El que piense el número, deberá dividirlo mentalmente por la mitad; esta mitad obtenida otra vez por la mitad, y así sucesivamente (de un número impar se quita una unidad), y en cada división debe colocar ante sí un cerillo, conforme a lo largo de la mesa si divide un número par, y transversalmente si llega a dividir un número impar. Al final de la operación se obtendrá un dibujo como el mostrado en la Fig. 44.



Figura 44. Adivinación del número pensado conforme a cerillos: lo que hace el que propone

Se fija la mirada en esta figura, y se nombra correctamente el número pensado: 137

¿Cómo se llega a saber?

El método resulta claro por sí mismo, si en el ejemplo elegido (137) sucesivamente se indica junto a cada cerillo, el número en cuya división aquel hubiese sido determinado (Fig. 45).

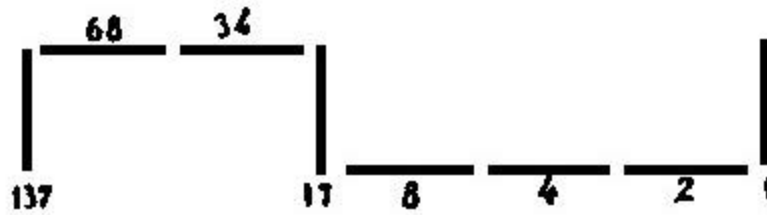


Figura 45. El secreto del truco: lo que hace el adivinador

Ahora, puesto que el último cerillo en todos los casos denota el número 1, hay que partir de él para, a través de las divisiones precedentes, llegar hasta el número inicialmente pensado. Por ejemplo, de acuerdo con la figura 46 se puede calcular que el número pensado era el 664.

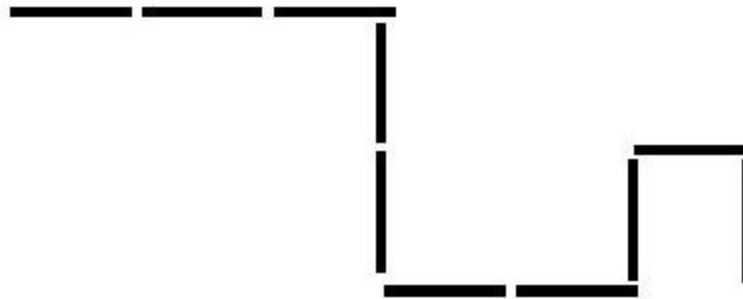


Figura 46. ¿Qué número está representado aquí?

En efecto, realizando las duplicaciones sucesivamente (empezando desde el final) y no olvidando agregar, donde sea necesario, la unidad, obtenemos el número pensado (ver Fig. 47).



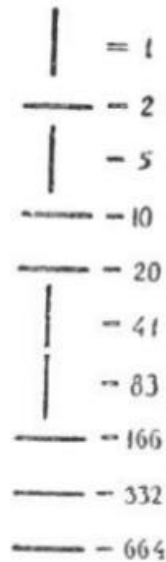


Figura 47. Respuesta al problema de la figura 46

De esta manera haciendo uso de los cerillos, se sigue el curso de los pensamientos ajenos, y se restablece toda la cadena de cálculos.

EL mismo resultado se puede obtener en otra forma considerando que, el cerillo que se halla en posición horizontal, deberá corresponder en el sistema binario al cero (la división entre 2 no da residuo), y el que se halla en posición vertical, a la unidad.

Así, en el primer ejemplo (figs. 44 y 45) tenemos el número (leyendo el dibujo de derecha a izquierda)

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 128 & 64 & 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{array}$$

o, en el sistema decimal:

$$128 + 8 + 1 = 137.$$

Y en el segundo ejemplo (fig. 46) el número pensado se representa en el sistema binario en la forma siguiente:

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 512 & 256 & 128 & 64 & 32 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{array}$$

o en el sistema decimal:

$$512 + 128 + 16 + 8 = 664.$$

Trátese de conocer qué número se pensó si se ha obtenido el dibujo de la Fig. 48.

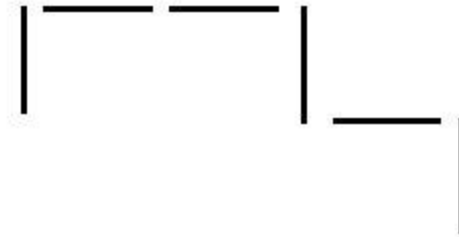


Figura 48. ¿Qué número está representado en esta figura?

Esto es fácil. Al número "100101" en el sistema binario, le corresponde en el decimal:

$$32 + 4 + 1 = 37$$

Es necesario observar que la unidad obtenida en la última división, deberá ser indicada, también, por un cerillo en posición vertical.

[Volver](#)

### 5. Sistema de Pesas Ideal

Quizá en ciertos lectores ya ha surgido una pregunta:

¿por qué, para la realización de las experiencias antes descritas, empleamos precisamente el sistema binario? Puesto que todo número se puede representar en cualquier sistema, entre otros también en el decimal, ¿qué explica aquí la predilección por el binario?

Esto se explica debido a que en este sistema, además del cero, se utiliza sólo una cifra más: la unidad, y por consiguiente, el número se constituye de diferentes potencias de 2, tomando sólo una cada vez. Si en el truco con los monederos distribuyéramos el dinero, por ejemplo, conforme al sistema quinario, entonces podría formarse cualquier suma sin abrir los monederos, pero solamente en el caso en que cada uno de los monederos que tenemos se repitiese no menos de 4 veces (en el sistema quinario se emplean, además del cero, 4 cifras).

Por otra parte, ocurren casos en los que, para semejantes menesteres, es más conveniente usar no el binario, sino el ternario, un poco modificado. Aquí viene al caso el antiguo famoso "problema sobre las pesas" que puede servir de tema, también, para un truco aritmético.

Supóngase que uno se ha propuesto inventar un juego de 4 pesas, por medio de las cuales sea posible pesar cualquier número entero de kilogramos, desde 1 hasta 40. EL sistema binario determina el juego:

1 kg, 2 kg, 4 kg, 8 kg, 16 kg.

con el que se pueden pesar todas las cargas comprendidas entre 1 y 31 kg Pero esto, evidentemente, no satisface las condiciones requeridas, ni por lo que se refiere al número, ni por lo referente a la carga límite (31 kg en lugar de 40 kg). Por otro lado, no se ha empleado aquí la posibilidad de colocar pesas, no solamente sobre un platillo de pesos, sino sobre el otro también; es decir, además de que se pasa por la suma de pesas, también se pasa por su diferencia. Lo último da combinaciones mucho más diversas, por lo que uno se pierde completamente en búsquedas, no pudiendo poner aquellas en cualquier sistema.

Si no se tiene la suerte de caer en el camino correcto, estará uno preparado dudosamente, en general, para la resolución del problema con un número pequeño de pesas, como es cuatro.



Figura 49. Con la ayuda de estas cuatro pesas se puede pesar cualquier carga comprendida entre 1 y 40 kilogramos.

Un iniciado sale de esta dificultad, con una sencillez pasmosa, proponiendo las 4 siguientes pesas (Fig. 49)

1 kg, 3 kg, 9 kg, 27 kg

Cualquier número entero de kilogramos, hasta 40 kg, se puede pesar con tales pesas; colocándolas en uno o en ambos platillos de pesos (ver la siguiente tabla).

No proporcionamos ejemplos, porque es fácil que cada uno por sí mismo, se dé cuenta de la completa utilidad de tal, juego de pesas, para nuestro objetivo. Analicemos con detenimiento el por qué precisamente la serie indicada posee esta propiedad. Probablemente<sup>3</sup>, los lectores ya observaron que estos números son la serie de potencia con base 3:

$$3^0, 3^1, 3^2, 3^3$$

Así pues, habremos de recurrir al sistema ternario de numeración. Las pesas son cifras de este sistema ternario. ¿Pero cómo puede aprovecharse dicho sistema, cuando un peso deseado se obtiene en la forma de una diferencia de dos pesas?; ¿y cómo evitar la necesidad de retornar al duplicamiento de pesas (en el sistema ternario, además del cero, se emplean dos cifras: 1 y 2)? Lo último se logra por la introducción de cifras "negativas". El hecho conduce, sin más, a que en lugar de la cifra 2 se emplee  $3 - 1$ , es decir, la unidad del orden superior, a la cual se le resta una unidad del orden inferior. Por ejemplo, el número 2 en nuestro sistema ternario modificado no se denota por el 2, sino por el  $\bar{1}1$ , en donde el signo menos, arriba de la cifra de las unidades, significa que esta unidad no se suma, sino se resta. En la misma forma, el número 5 se representa no por 12, sino por  $\bar{1}\bar{1}1$  (es decir,  $9, 3, 1 = 5$ ).

<sup>3</sup> La unidad se puede considerar como el 3 elevado al exponente cero (en general como el resultado de elevar cualquier número al exponente cero).

Ahora está claro que, si cualquier número se puede representar en el sistema ternario por medio del cero (es decir, por el signo de carencia de número) y de una sola cifra solamente, precisamente con una unidad sumada o restada, entonces de los números 1, 3, 9, 27 se puede, sumándolos o restándolos, formar todos los números desde el 1 hasta el 40. Ciertamente, escribimos todos estos números empleando pesas en lugar de cifras. El caso de la adición corresponde, en el acto de pesar, al caso en que las pesas se colocan sobre un platillo; y el caso de la substracción, cuando parte de las pesas se ponen sobre un platillo con mercancía, y por consiguiente, el peso de estas se resta del peso de las demás pesas. El cero corresponde a la ausencia de pesas.

Como se sabe, este sistema no se emplea en la práctica. Por doquier en el mundo, donde esta adoptado el sistema métrico de medidas se usa un juego de 1, 2, 2, 5 unidades, y no de 1, 3, 9, 27, aunque con el primero se pueden pesar cargas solamente hasta 10 unidades, y en el segundo hasta 40. El juego 1, 3, 9, 27 no se usaba tampoco cuando el sistema métrico todavía no se adoptaba. ¿Cuál es la causa de la renuncia en la práctica, a este sistema de pesas que parecía el más perfecto?

La razón es que el sistema de pesas ideal es conveniente sólo en el papel, pues su empleo en la práctica es dificultoso. Si se pesara solamente un número dado de unidades de peso, por ejemplo, 400 gr. de mantequilla o, 2500 gr. de azúcar, el sistema de pesas consistente en 100, 300, 900, 2700 podría ser empleado en la práctica (aunque también allí se tendría que buscar largamente, cada vez, la combinación decisiva). Pero cuando se tenga que determinar cuánto pesa una mercancía dada, entonces semejante sistema de pesas se muestra muy inconveniente: aquí, frecuentemente, con motivo de la adición de una unidad a las pesas suministradas, se produce una substitución total de la combinación anterior, por otra nueva. Bajo tales condiciones, el acto de pesar se convierte en una cuestión extremadamente lenta y además muy fatigosa. No todos se dan cuenta rápidamente de que, por ejemplo, el peso de 19 kg, se obtiene si en un platillo se colocan las pesas de 27 kg y 1 kg, y sobre el otro platillo, 9 Kg; el peso de 20 Kg, si sobre un platillo se ponen las pesas de 27 kg y 3 kg, y sobre el otro, 9 kg y 1 kg. En cada acción de pesar se puede caer en el problema de resolver rompecabezas semejantes. El sistema de pesas 1, 2, 2, 5, no conduce a tales dificultades.

[Volver](#)

## 6. Predecir la Suma de Números no Escritos

Uno de los "números" más sorprendentes, entre los realizados por el prodigioso calculista soviético R. S. Arrago, es la adición con la rapidez del rayo, con sólo una ojeada de una columna completa de números de varias cifras.

¿Pero qué decir sobre un hombre que puede escribir la suma, aún antes de que le sean nombrados todos los sumandos?

Esto naturalmente, es un truco, y se efectúa en la siguiente forma:

El adivinador propone escribir cualquier número de varias cifras; lanzando una mirada sobre este primer sumando, el adivinador escribe en un pedazo de papel la suma de toda la futura columna de tres sumandos, y la transmite a alguien, en depósito. Después de esto, pide al mismo, o a otro de los asistentes, escribir un nuevo sumando cualquiera. Y él mismo, enseguida, escribe rápidamente el tercer sumando. Se suman los tres números escritos y se obtiene, justamente, el resultado que fue escrito con anterioridad por el adivinador, en el papel que se ha guardado en depósito.

Si por ejemplo, se escribió en primer lugar 83267, entonces el adivinador escribe la suma futura: 183266. Después se escribe, supongamos, 27935 y el adivinador escrita el tercer sumando 72064:

I	Alguien	83.267
III	Alguien	+ 27.935
IV	EL adivinador	<u>72.064</u>
II	Suma	183.266

Se obtiene exactamente la suma predicha, aún cuando el adivinador no podía saber cuál sería el segundo sumando. El adivinador puede predecir también, una suma de 5 ó 7 sumandos, pero entonces él mismo escribe dos o tres de ellos. No se pueden tener sospechas sobre algún cambio del papel con el resultado, puesto que hasta el último momento se conserva en el bolsillo del depositario. Evidentemente, el adivinador emplea una cierta propiedad de los números, desconocida por uno. ¿Cuál es?

EL adivinador hace uso de la propiedad de que, de la adición de 5 nueves (99.999) a un número de cinco cifras, este número se incrementa en 100.000 - 1, es decir, antepuesta, a él aparece una unidad, y la última cifra se ve disminuida por otra unidad. Por ejemplo:

$$\begin{array}{r} 83.267 \\ + 99.999 \\ \hline 183.266 \end{array}$$

Esta suma, es decir, la suma del primer número escrito por nosotros y de 99 999, el adivinador precisamente la escribe sobre el pedazo de papel que depositará como el resultado futuro de la adición; y para que dicho resultado se justifique, él, viendo nuestro segundo sumando., elige su tercer sumando en tal forma que, conjuntamente con el segundo, constituya el 99 999: es decir, resta de 9 cada cifra del segundo sumando. Estas operaciones, fácilmente las puede uno observar en el ejemplo anterior y también en los siguientes:

I	Alguien	379.264
III	Alguien	4.873
IV	El adivinador	<u>995.126</u>
II	Suma	1.379.263

I	Alguien	9.035
III	Alguien	5.669
IV	El adivinador	<u>4.330</u>
II	Suma	19.034

Resulta difícil adivinar una suma si el segundo sumando contiene mayor cantidad de cifras que el primero, ya que el adivinador no podrá escribir un tercer sumando que, disminuyendo al segundo, sea capaz de reducir la suma para que dé el número predicho. Esto sólo sería posible recurriendo a la substracción, lo cual ya sale de los planes del truco. A causa de esto, un adivinador experimentado deberá limitar previamente, la libertad de elección para el segundo sumando, a esta condición.

El truco resulta más imponente, cuando en la invención de los sumandos participan varias personas. Después del primer sumando, por ejemplo 437.692, el adivinador ya predice la suma de

los cinco números, y escribirá 2.437.690 (aquí se agregará dos veces 999.999, es decir, 200 000 - 2). Todo lo demás es claro debido al siguiente esquema:

I	Uno escribió	437.692
III	Otro escribió	822.541
V	Un tercero escribió	263.009
IV	EL adivinador escribió	177.458
VI	EL adivinador escribió	<u>736.990</u>
II	Suma	2.437.690

Tomemos otro ejemplo:

I	Uno escribió	7.400
III	Otro escribió	4.732
V	Un tercero escribió	9.000
IV	EL adivinador escribió	5.267
VI	EL adivinador escribió	<u>999</u>
II	Suma	27.938

A los lectores les resultará interesante ahora, conocer cómo está descrito el mismo truco por el escritor soviético Shíshkov, en su novela "Los extraños":

"Iván Petrovich arrancó una hojita de su cuaderno de notas y dándosela a un chico, le preguntó.

- ¿Tienes un lápiz? Escribe un número cualquiera.

EL niño escribió. Iván Petrovich vio el número, y escribió en otro papel un número más.

- Ahora, escribe otro debajo de él. ¿Ya lo escribiste? Ahora yo escribiré un tercer número. Ahora suma los tres números.

En dos minutos quedó lista la respuesta verificada. El ingeniero Voshkin (sobrenombre del niño) mostró su cálculo:

$$\begin{array}{r} 46.853 \\ + 21.398 \\ \hline 78.601 \\ 146.852 \end{array}$$

- Ciento cuarenta y seis mil ochocientos cincuenta y dos, Iván Petrovich.

- Sumaste en mucho tiempo. Aquí tengo la respuesta. Yo también la sabía, pero desde que tú escribiste el primer número. Helo aquí. Toma mi papel.

El niño vio incrédulo el papel en que Iván Petrovich había escrito el resultado, y era exactamente el 146.852".

En la novela, el truco no va acompañado de la solución, pero para uno, es completamente comprensible su sencilla hace aritmética.

[Volver](#)

## 7. Sorpresa Aparente.

En el año 1916, durante el apogeo de la guerra imperialista, algunos periódicos de la neutral Suiza se entretenían con una "adivinación" aritmética sobre el destino futuro de los emperadores de Alemania y Austria. "Los profetas" sumaban las siguientes columnas de números:

	Para Guillermo II	Para Francisco José
año de nacimiento	1859	1830
año de llegada al trono	1888	1888
años de reinado	28	68
edad	57	86
Suma	3832	3832

En la coincidencia de las sumas, "los profetas" vieron un sombrío augurio para los personajes coronados, y puesto que cada total representaba en sí, el doble del año 1916, a ambos emperadores se les predijo la ruina, precisamente en dicho año.

Mientras tanto, desde el punto de vista matemático la coincidencia de resultados no es sorprendente. Basta modificar un poco el orden de los sumandos, y resulta comprensible el por qué ellos dan en el total, el doble del año 1916. En efecto, repartamos los sumandos en la siguiente forma:

- Año de nacimiento
- edad
- año en que llegó al trono
- años de reinado.

¿Qué deberá obtenerse, si al año de nacimiento se le agrega la edad? Sin duda, la fecha del año en que se produce el cálculo. En la misma forma, si al año de llegada al trono se le añade el número de años de reinado, se obtiene de nuevo el año en que se realizan los cálculos. Es claro que el total de la adición de nuestros cuatro sumandos no puede ser otro, que el doble del año de realización del cálculo. Evidentemente, el futuro de los emperadores no depende en absoluto de semejante aritmética.

Puesto que de lo indicado arriba no todos se dan cuenta, se puede aprovechar esto para un truco aritmético recreativo. Propóngase a cualquiera escribir, a escondidas de uno, cuatro números:

- Año de nacimiento
- Año de ingreso a la escuela (a la fábrica, etc.)
- Edad
- Años estudiando en la escuela (trabajando en la fábrica, etc.)

Uno puede ponerse a adivinar la suma de estos números, aunque ninguno de ellos nos sea conocido. Para esto se duplica el año de realización del truco y se anuncia el total. Si, por ejemplo, el truco se realiza en el año 1961, entonces la suma será 3922. Para tener la posibilidad de realizar con éxito este truco varias veces, sin revelar el secreto, uno obliga a los oyentes a efectuar sobre la suma cualquier operación aritmética, encubriendo con esto, el método.

[Volver](#)

### 8. División Instantánea

De la numerosa variedad de trucos de este género, describamos uno basado en una propiedad, ya conocida por nosotros, del multiplicador que consiste de una serie de nueves: cuando se multiplica por él un número con varias cifras, se obtiene un resultado que consta de dos partes: la primera es, el número multiplicado disminuido en una unidad; la segunda es, el resultado de la substracción de la primera mitad respecto del multiplicador. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}247 \times 999 &= 246.753 \\1.372 \times 9999 &= 13.718.628\end{aligned}$$

La causa de esto se ve fácilmente del siguiente renglón:

$$247 \times 999 = 247 \times (1000 - 1) = 247.000 - 247 = 246.999 - 246.$$

Aprovechando esto, se propone a un grupo de camarada efectuar la división de números de varias cifras: a uno 68 933 106 : 6894, a otro 8 765 112 348: 9999, a un tercero 543 456:544, a un cuarto 12 948 705 : 1295, etc., y uno se pone a tomar la delantera a todo: ellos, realizando los mismos problemas. Y antes de que ellos se empiecen a ocupar del asunto, uno entrega ya a cada uno un papelillo con el resultado correcto obtenido de la división: al primero 9999, al segundo 87 652, al tercero 999, al cuarto 9999. Uno puede por si mismo, al imaginar una serie de otros procedimientos, conforme al ejemplo indicado, sorprender a tus no iniciados con la realización simultánea de la división: para esto se aprovechan ciertas propiedades de aquellos números que se hallan en la "Galería de las maravillas numéricas" (ver capítulo V).

[Volver](#)

### 9. La Cifra Favorita

Propóngase a cualquiera, que le comunique su cifra favorita. Supongamos que le han nombrado a uno la cifra 6.

- ¡Es sorprendente!, exclama uno, Esta es justamente, una de las cifras significativas más notables.
- ¿Por qué dicha cifra es notable?, se pregunta el interesado interlocutor.
- Lo es, por lo que verá Ud. enseguida: multiplique la cifra dada, por algún número, por ejemplo 9; y el número obtenido (54) escríbalo como multiplicador del número 12 345 679:

$$12\ 345\ 679 \times 54$$

¿Qué se obtuvo en el producto?

Nuestro interlocutor efectúa la multiplicación, y con sorpresa obtiene el resultado, que está constituido exclusivamente por su cifra favorita:

$$666\ 666\ 666.$$

Vea que fina percepción matemática tiene Ud., concluye uno, ¡Ud. supo elegir de todas las cifras, justamente la que posee una propiedad tan notable!

Sin embargo, ¿cuál es la cuestión aquí?



Exactamente la misma refinada inclinación, se manifestaría en nuestro interlocutor, si hubiera elegido alguna otra de las nueve cifras significativas, porque cada una de ellas posee esa propiedad:

$$12\ 345\ 679 \times 4 \times 9 = 444\ 444\ 444$$

$$12\ 345\ 679 \times 7 \times 9 = 777\ 777\ 777$$

$$12\ 345\ 679 \times 9 \times 9 = 999\ 999\ 999$$

Por qué razón esto es así, uno lo comprende, si se recuerda que se habló sobre el número 12 345 679 en la "Galería de maravillas numéricas".

[Volver](#)

### 10. Adivinar la Fecha de Nacimiento

Los trucos que se relacionan con esta categoría, pueden ser modificados en diversas formas. Yo describo una de las especies de este truco, demasiado complicado, pero que precisamente por eso motiva un gran efecto.

Supongamos que Ud. nació el 18 de mayo y que ahora tiene 23 años. Yo, naturalmente, no conozco ni la fecha de vuestro nacimiento, ni vuestra edad. Sin embargo yo me pongo a adivinar eso, forzando a Ud. a realizar una cierta serie de cálculos,

A saber: Yo le pido a Ud. que multiplique el número de orden del mes (mayo, 5º mes), por 100; que agregue al producto el día del mes (18); que duplique la suma, al resultado le añada 8, el número obtenido lo multiplique por 5, al producto le agregue 4, multiplique el resultado por 10, le sume 4, y al número obtenido le agregue vuestra edad (23).

Cuando Ud. haya realizado todo esto, me comunica el resultado final de los cálculos. Yo resto de él 444, y la diferencia la distribuyo en grupos de derecha a izquierda, conforme a 2 cifras en cada uno: Obtengo simultáneamente tanto el día y el mes de vuestro nacimiento, como vuestra edad.

En efecto, realicemos sucesivamente todos los cálculos indicados:

$$\begin{aligned} 5 \times 100 &= 500 \\ 500 + 18 &= 518 \\ 518 \times 2 &= 1\ 036 \\ 1\ 036 + 8 &= 1\ 044 \\ 1\ 044 \times 5 &= 5\ 220 \\ 5\ 220 + 4 &= 5\ 224 \\ 5\ 224 \times 10 &= 52\ 240 \\ 52\ 240 + 4 &= 52\ 244 \\ 52\ 244 + 23 &= 52\ 267 \end{aligned}$$

Efectuando la resta  $52\ 267 - 444$ , obtenemos el número 51 823.

Ahora, dividamos este número en grupos de dos cifras, de derecha a izquierda:

$$5,\ 18,\ 23,$$

es decir, 5º mes (mayo); número del día, 18; edad 23 años.

¿Por qué obtuvimos este resultado?

Nuestro secreto es fácil de entender tras considerar la siguiente igualdad

$$\{[(100m + t) \times 2 + 8] \times 5 + 4\} \times 10 + 4 + n - 444 = 10000m + 100t + n.$$

Aquí la letra m denota el número de orden del mes, t el día del mes, n la edad. El primer miembro de la igualdad expresa todas las operaciones realizadas sucesivamente por Uds., y el segundo miembro, lo que se obtiene, si se eliminan paréntesis y se realizan las simplificaciones posibles. En la expresión

$$10\ 000\ m + 100\ t + n$$

ni n, ni m, ni t pueden ser números con más de dos cifras; por tal razón, el número que se obtiene en el resultado, deberá siempre, en la división en grupos, con dos cifras cada uno, descomponerse en tres partes expresadas por los números buscados m, t y n.

Dejamos a la inventiva del lector el imaginar modificaciones del truco, es decir, otras combinaciones de operaciones que den un resultado semejante.

[Volver](#)

### 11. Una de las "Operaciones Favoritas" de Magnitski

Propongo al lector descubrir también, el secreto del siguiente sencillo truco, que fue descrito ya en la "Aritmética" de Magnitski, en el capítulo "Sobre ciertas operaciones recreativas utilizadas en aritmética".

Consistía en dar a ocho hombres, (designados por los números del 1 al 8) un anillo, para que uno de ellos, sin mostrarlo, se lo pusiera en una de las tres articulaciones de uno de los dedos. Por ejemplo, el anillo quedaría en la segunda articulación del dedo meñique (es decir, el 5° dedo) del 4° hombre. Se preguntaba: ¿En cuál de los ocho hombres, en qué dedo y en cuál articulación del dedo se encuentra el anillo?. y enseguida, en ausencia del adivinador se debían hacer las siguientes operaciones:

$$\begin{array}{r}
 \cdot 4 \text{ лицѣ} \cdot \\
 \underline{2 \text{ множи:}} \\
 8 \\
 \underline{5 \text{ приложи:}} \\
 13 \\
 \underline{5 \text{ множи:}} \\
 65 \\
 \underline{5 \text{ приложи и перста:}} \\
 70 \\
 \underline{10 \text{ множи:}} \\
 700 \\
 \text{составъ 2 приложн.} \\
 702 \\
 \underline{250} \\
 452
 \end{array}$$

Figura 50. Truco matemático de la Aritmética de Magnitski. Se ha reproducido el grabado como aparece en la obra mencionada, con las palabras escritas en ruso antiguo, y que significan sucesivamente, de arriba hacia abajo: persona: - multiplique: - sume: - multiplique: - sume el número del dedo: - multiplique: - sume el número 2 de la articulación

"El número del hombre que tenga el anillo, multiplicarlo por 2; al resultado, sumarle 5, y multiplicar por 5 la suma: agregar el número del dedo en que está el anillo, y multiplicar el resultado por 10; agregar el número de la articulación.

Este resultado se debe dar al hombre que no había visto lo anterior. EL, después de restar a este número 250, obtiene 452, es decir, 4<sup>to</sup> hombre, 5<sup>to</sup> dedo, 2<sup>a</sup> articulación".

No necesitamos decir que este truco ya era conocido 200 años atrás; problemas como éste habían sido planteados por Bashede-Maziriaka en sus "Problemas numéricos instructivos y recreativos", en el año 1612; y aún antes, por Leopardo Pisano (Fibonacci) (año 1202). En general, se puede decir que muchos de los juegos matemáticos, rompecabezas y acertijos, que se practican en nuestro tiempo, tienen un origen muy antiguo.

[Volver](#)

## 12. Adivinación de Números

Finalmente, sin preguntarle nada a Ud., yo adivino el resultado que se obtiene en el total de cálculos efectuados con un número pensado.

Piense cualquier cifra, excepto el cero. Multiplíquela por 37. Lo obtenido multiplíquelo por 3. Borre la última cifra del producto, y el número que quede divídalo por el número pensado inicialmente no habrá resto.

Yo le puedo decir qué número obtuvo Ud., aunque todo esto lo escribí mucho tiempo antes de que Ud. procediera a la lectura del libro.

Ud. obtuvo el número 11.

La segunda vez hagamos el truco en otra forma. Piense un número de dos cifras. Escriba a la derecha de él el mismo número otra vez. El número de cuatro cifras obtenido divídalo entre el número pensado: la división se realiza sin resto. Sume todas las cifras del cociente. Ud. obtuvo 2. Si no es así, verifique cuidadosamente sus cálculos y se convencerá de que se equivocó Ud., y no yo.

¿Cuál es la clave de estos trucos?

Clave: Nuestro lector ahora ya está suficientemente experimentado en el desciframiento de trucos, y no requiere de mis largas explicaciones. En la primera prueba de adivinación, el número pensado se multiplicó inicialmente por 37, después por 3.

Pero  $37 \times 3 = 111$ , y multiplicar una cifra por 111 equivale a constituir un número por tres cifras idénticas (por ejemplo,  $4 \times 37 \times 3 = 444$ ). Qué hicimos después? Borrarnos la última cifra y, por consiguiente, se obtuvo un número de dos cifras idénticas (44) el que naturalmente, debería dividirse por la cifra pensada, y dar 11 como cociente.

En la segunda prueba, el número pensado de dos cifras, lo escribimos dos veces: por ejemplo, pensando 29, se escribió 2929.

Esto es completamente igual a multiplicar el número pensado por 101 (en efecto,  $29 \times 101 = 2929$ ). Como esto yo lo se, puedo con justeza prever que de la división de tal número de cuatro cifras entre el número pensado, se obtiene 101 y que, por consiguiente, la suma de las cifras del cociente ( $1 + 0 + 1$ ) es igual a 2.

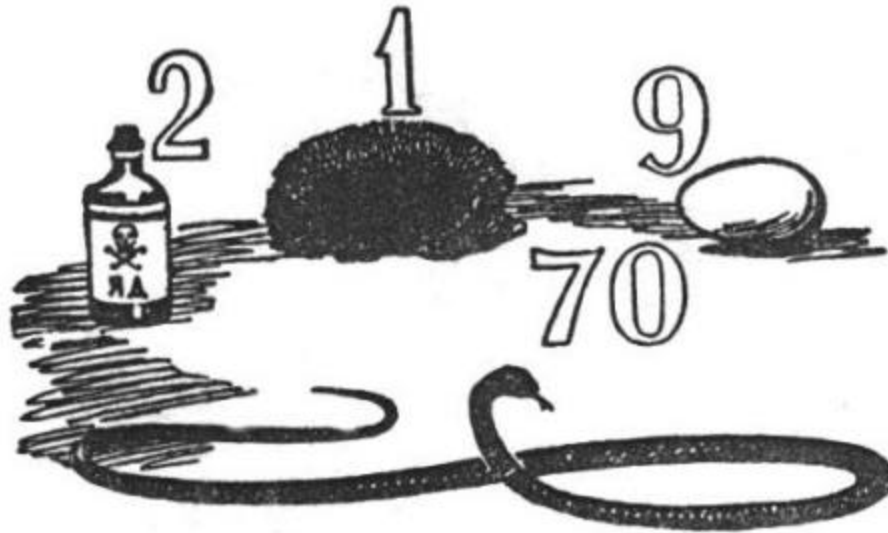
Como se ve, la adivinación está basada en las propiedades de los números 111 y 101, por lo que estamos en el derecho de colocar ambos números en nuestro museo aritmético.

[Volver](#)

### 13. Curiosidades Aritméticas

$$100 = \left\{ \begin{array}{l} 1 + \\ + 24\frac{3}{6} + 75\frac{9}{18} + \\ + 47\frac{3}{6} + 52\frac{9}{18} \end{array} \right.$$

[Volver](#)



## Capítulo Séptimo CALCULO RAPIDO

*Contenido:*

1. [Fenómenos Reales y Ficticios](#)
2. [Memorización de Números](#)
3. ["¿Cuántos Días Tengo?"](#)
4. ["¿Cuántos Segundos Tengo?"](#)
5. [Métodos de Multiplicación Acelerada](#)
6. [Para Cálculos Cotidianos](#)
7. [Curiosidades Aritméticas](#)

### 1. Fenómenos Reales y Ficticios

Quien haya asistido a sesiones de nuestro calculista soviético Arrago, puede no sorprenderse por sus enormes capacidades de cálculo. Aquí ante nosotros ya no hay trucos, sino un notable don natural. El cubo del número 4729, por ejemplo, Arrago lo calculó ante mí mentalmente en menos de un minuto (resultado: 105.756.712.489), y en la multiplicación  $679.321 \times 887.064$ , también mentalmente, empleó en total 1 1/2 minutos.

Yo he tenido la posibilidad de observar el trabajo de este fenomenal calculista, no solamente en el estrado, sino también en reuniones domésticas, a solas, y me convencí de que no emplea ningún método especial de cálculo, y calcula mentalmente, en general, como lo hacemos nosotros sobre el papel. Pero su extraordinaria memoria para los números lo ayuda a pararse sin la escritura de los resultados intermedios, y la rapidez de inteligencia le permite operar con los números de dos cifras tan fácilmente, como nosotros efectuamos las operaciones con números de una cifra. Gracias a esto, la multiplicación entre números de seis cifras resulta, para él, un problema de no mayor complicación que lo que para nosotros significa la multiplicación de números de tres cifras.

Tales fenómenos, como Arrago entre nosotros, o en Occidente Inodí, Diamandi, Rückle, el Dr. Fred Brauns, se cuentan con los dedos. Pero conjuntamente con ellos se consagran también, matemáticos de estrado de otro género, que fundamentan su arte en unos u otros trucos aritméticos. Usted puede haber llegado a escuchar o inclusive a asistir a "sesiones de geniales

matemáticos" que calculaban de memoria, con una rapidez sorprendente, cuántos, días, minutos y segundos tiene usted, en qué día de la semana nació, etc. Para realizar una gran parte de estos cálculos, no es necesario, sin embargo, poseer una capacidad matemática extraordinaria. Es necesario, solamente, conocer algunos secretos de estos trucos, al revelamiento de los cuales, pasamos enseguida.

[Volver](#)

## 2. Memorización de Números

Un calculista rápido, deberá poseer ante todo, un excelente desarrollo de la memoria para los números. Los siguientes récords muestran hasta qué refinamiento llega tal memoria en los mejores calculistas. El famoso calculista alemán Rückle se aprendió de memoria un número que se compone de 504 cifras, en el transcurso de 35 minutos, y su compatriota doctor Brauns destrozó este récord, haciendo lo mismo ¡en menos de 13 minutos!

Pero naturalmente, tal memoria fenomenal es dotada por la naturaleza en forma muy especial. Los calculistas profesionales que se consagran al estrado, no poseyendo una memoria natural para los números, se ayudan así mismos por diferentes medios artificiales (los llamados "mnemotécnicos"). En la vida diaria nosotros mismos hemos intentado emplear semejantes métodos, la mayor parte, es necesario reconocerlo, demasiado mal elegidos. Deseando, por ejemplo, recordar el número de teléfono 25-49<sup>1</sup> depositamos la esperanza en el hecho de que este número es fácil de reconstruir en la memoria, ya que está, compuesto de dos cuadrados exactos:  $25 = 5^2 =$ ,  $49 = 7^2$ . Pero cuando es menester recordarlo en un momento dado, resulta que nos confundimos entre tantos otros números telefónicos conocidos y desconocidos:

12-25, 36-64, 25-16, 64-16, 81-25, etc.

Semejante fracaso lo concebimos también en otros casos. El teléfono número 17-53 nos proponemos recordarlo, aprovechando el hecho de que la suma de las dos primeras cifras ( $1 + 7$ ) es igual a la suma de las dos últimas ( $5 + 3$ ). Pero al final no resulta mejor que en el caso anterior. Y en efecto, aún falta no confundir a qué teléfono se le aplica precisamente esa, y a cuál se le aplica otra combinación. No puede sino sorprender, el ver cómo las personas intentan, con obstinación, emplear este método notoriamente inservible. La afición a este método, la ridiculizó con gran ingenio el escritor J. Hasek en sus famosas "*Aventuras del bravo soldado Sveik*"<sup>2</sup>:

"Sveik miró atentamente el número de su fusil y, al final, dijo:

- El número 4268. Justamente tal número estaba en una locomotora en Pées en la vía dieciséis. Era necesario llevar la locomotora a Liss para la reparación, pero esto no era tan fácil, porque el maquinista que debería conducirla allá, tenía muy mala memoria para los números. Entonces el jefe de distancia lo hizo venir al despacho y le dijo: "Sobre la vía 16 se encuentra la locomotora número 4268. Yo sé que usted tiene mala memoria para los números, y si escribe el número en un papelillo, pierde usted el papelillo. Pero si verdaderamente es tan débil para los números, entonces trate de recordar lo que yo ahora le indico, para que vea usted que es muy fácil conservar en la memoria cualquier número. El modo es el siguiente: la locomotora que es

<sup>1</sup> Conviene hacer notar que, en nuestra capital, un número telefónico consta de tres pares de cifras, por ejemplo: 46-44-25, 26-80-63, etc. (N. del T.)

<sup>2</sup> Jaroslav Hasek (nació el 30 de abril de 1883 en Praga; murió el 3 de enero de 1923 en Lipnitz) escritor satírico checoslovaco. (N. del T.)

necesario que usted conduzca al depósito, está marcada con el número 4268. Dirija precisamente la atención aquí. La primera cifra es un cuatro, la segunda un dos. Recuerde, por consiguiente, 42, es decir, dos por dos son cuatro, lo que nos da la primera cifra, y si usted la divide entre dos, obtiene de nuevo dos, y en esta forma se obtiene, junto al 4, el 2. Luego ya es sencillo. ¿Cuánto será el doble de cuatro? ocho ¿no es así?. Así usted graba en su memoria el ocho que es, la última cifra en nuestro número. Ahora ya recuerda usted que la primera cifra es el cuatro, la segunda el dos y la última el ocho. Es decir, resta sólo recordar la cifra seis antes del ocho. Pero esto es completamente sencillo. La primera cifra que tenemos es el 4, la segunda el 2, y conjuntamente constituyen el 6. De esta manera el número 4268 ya se ha alojado firmemente en vuestra cabeza. Puede también llegar al resultado, por un camino más sencillo, a saber: de 8 se resta 2, y se obtiene 6. Recuerde: 6. De seis se resta 2, y se obtiene 4. Por consiguiente, tenemos ya 4 y 68. Ahora es necesario únicamente, colocar la cifra: 2 entre esos dos números y obtenemos 4268. Se puede hacer aún en otra forma, también muy fácilmente, por medio de la multiplicación. Recuerde que el doble de 42 es igual a 84. En un año hay doce meses. Es necesario reatar 12 de 84, quedando 72, y de 72 se restan los 12 meses. Se obtiene 60. Lo que tenemos aquí es, ya, el 6, porque el cero, sencillamente lo podemos dejar a un lado. Es decir, si escribimos 42-6-84 y dejamos a un lado el último 4, obtenemos inevitablemente el número 4268, es decir, el número de la locomotora que es necesario conducir".

Los métodos de los calculistas de estrado son de un género absolutamente diferente. He aquí uno de ellos, que en alguna ocasión puede llegar a servir a cada uno de nosotros. El calculista relaciona con las cifras, determinadas letras consonantes, bien aprendidas:

<i>Cifras</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>G</i>	<i>J</i>	<i>K</i>	<i>P</i>	<i>S</i>	<i>R</i>	<i>W</i>	<i>X</i>
<i>Letras</i>	<i>C</i>	<i>F</i>	<i>H</i>	<i>Z</i>	<i>M</i>	<i>R</i>	<i>T</i>	<i>V</i>	<i>Y</i>	<i>L</i>

Puesto que las letras elegidas son únicamente consonantes, entonces ellas pueden, no temiendo confusiones, combinarse con vocales para constituir palabras cortas. Por ejemplo:

Para los Números	las palabras	Para los Números	las palabras
1	de	6	ese
2	ha	7	va
3	jo	8	yo
4	ama	9	ole
5	upa	0	aca

En forma análoga se constituyen las palabras, también para números de dos cifras:

11 ? dedo  
 13 ? dejo  
 14 ? dama  
 16 ? dato  
 19 ? dale  
 21 ? hada

Para recordar el número 2549, el calculista de estrado mentalmente escribe bajo las cifras, las letras correspondientes:

2 5 4 9  
G P K X  
H R M L

y a partir de ella, constituye, rápidamente, las palabras:

25            49  
GIRO        MALO

Tal es uno de los métodos mnemotécnicos empleados entre los calculistas de estrado. Existen también otros, sobre los cuales, sin embargo, no nos detendremos, pues ahora pasaremos a los métodos de realización de algunos casos.

¿Cuántos, años tengo?, ¿cuántos días tengo?, pregunta cualquiera del público, Y obtiene rápidamente del estrado, la respuesta.

¿Y cuántos segundos tengo, si mi edad es tal? hace la pregunta otro, y obtiene también rápida respuesta.

¿Cómo se realizan semejantes cálculos?

[Volver](#)

### 3. "¿Cuántos Días Tengo?"

Para determinar de acuerdo con el número de año, el número de días, el calculista recurre al siguiente método: la mitad del número de años lo multiplica por 73 y añade un cero; el resultado será, precisamente, el número buscado. Esta fórmula se vuelve comprensible si se observa que  $730 = 365 \times 2$ : Si tengo 24 años, el número de días lo obtenemos multiplicando  $12 \times 73 = 876$  añadiendo un cero: 8760. La propia multiplicación por 73 se realiza también en forma abreviada, como veremos más adelante.

La corrección en algunos días con motivo de los años bisiestos, generalmente no se efectúa en el cálculo, aunque es fácil introducirla agregando al resultado la cuarta parte del número de años; en nuestro ejemplo:  $24:4 = 6$ ; el resultado total, por consiguiente, es 8766.

El método para el cálculo del número de minutos, no se le dificultará al lector encontrarlo por sí mismo, después de lo indicado en el párrafo que sigue.

[Volver](#)

### 4. "¿Cuántos Segundos Tengo?"

Si la edad del interrogador se expresa por un número par no mayor que 26, entonces se puede responder muy rápidamente sobre esta cuestión empleando el siguiente método: la mitad del número de años se multiplica por 63; después la misma mitad se multiplica por 72; este resultado queda al lado del primero y se agregan tres ceros. Si por ejemplo, el número de años es 24, entonces para la determinación del número de segundos procedemos así:

$$63 \times 12 = 756; 72 \times 12 = 864, \text{ resultado } 756.864.000.$$



Como en el ejemplo anterior, aquí no están tomados en cuenta los años bisiestos, un error que nadie reprocha al calculista, cuando se tiene que ver con cientos de millones (pero que se puede corregir, agregando el número de segundos que se contienen, en la cantidad de días igual a la cuarta parte del número de años).

¿ En qué se basa el método aquí indicado ?

La justeza de nuestra fórmula se explica de un modo sencillo. Para determinar el número de segundos que se contienen en un número dado de años, es necesario que los años (24 en nuestro ejemplo) se multipliquen por el número de segundos en el año, es decir,

$$365 \times 24 \times 60 \times 60 = 31.536.000.$$

Luego, el factor mayor 31.536 lo separamos en dos partes (el agregado de los ceros, por sí mismo es comprensible, y en lugar de que se multiplique 24 por 31.536, se multiplica 24 por 31.500 y por 36; pero también estas operaciones, para comodidad de los cálculos las sustituimos por otras, como es evidente del siguiente esquema:

$$24 \times 31.536 = \left\{ \begin{array}{l} 24 \times 31.500 = 12 \times 63.000 = 756.000 \\ 24 \times 36 = 12 \times 72 = 864 \end{array} \right\} = 756.864$$

Sólo falta agregar tres ceros, y tenemos el resultado buscado:

$$756.864.000.$$

[Volver](#)

## 5. Métodos de Multiplicación Acelerada

Ya indicamos antes que para realizar las diversas operaciones de una multiplicación, vital componente de cada uno de los métodos arriba expuestos, existen también métodos adecuados. Algunos de ellos son sencillos y fácil de aplicar; aligeran a tal grado los cálculos, que en general, no molesta recordarlos para su empleo práctico. Tal es, por ejemplo, el método de la multiplicación cruzada, muy conveniente en las operaciones con números de dos cifras. El método no es nuevo; se remonta a los griegos e hindúes y en la antigüedad se llamaba "método relámpago" o "multiplicación por cruz". Ahora está olvidado y no tiene ningún problema el recordarlo.

Supóngase que se requiere multiplicar  $24 \times 32$ . Mentalmente disponemos los números conforme al siguiente esquema, uno debajo del otro:

$$\begin{array}{r} 2 \quad 4 \\ \times \\ 3 \quad 2 \end{array}$$

Ahora, realicemos sucesivamente las siguientes operaciones:

1.  $4 \times 2 = 8$  ésta es la última cifra del resultado.
2.  $2 \times 2 = 4$  ;  $4 \times 3 = 12$  ;  $4 + 12 = 16$  ; 6 es la penúltima cifra del resultado; recordemos mentalmente 1.

3.  $2 \times 3 = 6$ , más la aún conservada unidad en la mente, tenemos 7 ; ésta es la primera cifra del resultado.

Obtenemos, por consiguiente, el producto: 768.

Después de varios ejercicios este método se asimila fácilmente.

Otro método que consiste en los llamados "complementos", se aplica en forma conveniente en aquellos casos en que los números multiplicados están próximos al 100.

Supongamos que se requiere multiplicar  $96 \times 92$ . "El complemento" para 92 hasta 100 será 8, para 96 será 4. La operación se realiza conforme al siguiente esquema:

Factores	92	96
Complementos	8	4

Las dos primeras cifras del resultado se obtienen por la simple sustracción del "complemento" del multiplicando respecto del multiplicador o viceversa, es decir, de 92 se sustrae 4 ó de 96 se sustrae 8. Tanto en uno como en otro caso tenemos 88; a este número se le agrega el producto de los "complementos":  $8 \times 4 = 32$ . Obtenemos el resultado 8832.

Que el resultado obtenido deberá ser exacto, es indudable por las siguientes transformaciones:

$$92 \times 96 = \begin{cases} 88 \times 96 = 88 \times (100 - 4) = 88 \times 100 - 88 \times 4 \\ 4 \times 96 = 4 \times (88 + 8) = 4 \times 8 + 88 \times 4 \end{cases}$$

$$92 \times 96 = 8.800 + 32 = 8.832$$

Veamos otro ejemplo:

Se requiere multiplicar 78 por 77.

Factores	78	77
Complementos	22	23

$$78 - 23 = 55$$

$$22 \times 23 = 506$$

$$5500 + 506 = 6006$$

Veamos un tercer ejemplo:

Multiplicar  $99 \times 98$ .

Factores	99	98
Complementos	1	2

$$99 - 2 = 97$$

$$1 \times 2 = 3$$

En el caso dado es necesario recordar que 97 denota aquí el número de centenas. Por tal razón sumamos:

$$9700 + 2 = 9702.$$

[Volver](#)

## 6. Para Cálculos Cotidianos

Existe un gran conjunto de métodos de realización acelerada de las operaciones aritméticas, métodos destinados no a intervenciones de estrado, sino a cálculos cotidianos. Si hubiera que exponer tan sólo los principales de dichos métodos, sería necesario escribir un libro completo.

Nos limitaremos pues, a algunos ejemplos con números de uso común y corriente.

En la práctica de los cálculos técnicos y comerciales es un caso frecuente que se lleguen a sumar columnas de números muy próximos uno a otro, por lo que se refiere a la magnitud. Por ejemplo:

43  
38  
39  
45  
41  
39  
42

*La adición de estos números se simplifica notablemente si se aprovecha el método indicado a continuación, cuya esencia es fácil de comprender*

$$\begin{aligned} 43 &= 40 + 3 \\ 38 &= 40 - 2 \\ 39 &= 40 - 1 \\ 45 &= 40 + 5 \\ 41 &= 40 + 1 \\ 39 &= 40 - 1 \\ 42 &= 40 + 2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} & \\ & \\ & \\ &= 40 \times 7 + 3 - 2 - 1 + 5 + 1 - 1 + 2 \\ &= 280 + 7 = 287 \end{aligned}$$

De la misma manera hallamos la suma:

$$\begin{aligned} 752 &= 750 + 2 \\ 753 &= 750 + 3 \\ 746 &= 750 - 4 &= 750 \times 6 + 2 + 3 - 4 + 4 - 5 + 1 \\ 754 &= 750 + 4 &= 4500 + 1 = 287 \\ 745 &= 750 - 5 \\ 751 &= 750 + 1 \end{aligned}$$

En forma análoga se procede para hallar la media aritmética de números cuyo valor sea muy parecido. Encontramos, por ejemplo la media de los siguientes precios:

Rublos	kopeks	
4	65	Fijemos a ojo, un precio redondeado próximo a la media: en el caso dado evidentemente es 4 r, 70 k. Escribamos las desviaciones de todos los precios con relación a la media: los excesos con el signo +, los defectos en el signo -. Obtenemos: $-5 + 3 + 5 - 3 + 8 + 4 - 2 + 2 = 12$
4	73	
4	75	
4	67	
4	78	
4	74	
4	68	
4	72	

Dividiendo la suma de las desviaciones entre el número de ellas, tenemos:

$$12:8 = 1,5.$$

Así pues, el precio medio buscado es:

$$4 \text{ rublos } 70 \text{ k} + 1,5 \text{ k.} = 4 \text{ rublos y } 71,5 \text{ kopeks}$$

Pasemos a la multiplicación. Ante todo indiquemos que la multiplicación por los números 5, 25 y 125 se acelera notablemente si se tiene en cuenta, lo siguiente:

$$5 = 10/2; \quad 25 = 100/4; \quad 125 = 1000/8$$

Por esta razón, por ejemplo:

$$\begin{aligned} 36 \times 5 &= 360/2 = 180 \\ 36 \times 25 &= 3600/4 = 900 \\ 36 \times 125 &= 36\,000/8 = 4500 \\ 87 \times 5 &= 870/2 = 435 \\ 87 \times 25 &= 8700/4 = 2175 \\ 87 \times 125 &= 87\,000/8 = 10875 \end{aligned}$$

Para multiplicar por 15 se puede aprovechar que

$$5 = 10 \times 1 \frac{1}{2}$$

Por tal motivo, es fácil realizar en la mente cálculos como:

$$36 \times 15 = 360 \times 1 \frac{1}{2} = 360 + 180 = 540$$

o sencillamente,

$$\begin{aligned} 36 \times 1 \frac{1}{2} \times 10 &= 540, \\ 87 \times 15 &= 870 + 435 = 1305. \end{aligned}$$

En la multiplicación por 11 no hay necesidad de escribir 5 renglones:

$$\begin{array}{r} 383 \\ \times 11 \\ \hline 383 \\ + 383 \cdot \\ \hline 4213 \end{array}$$

basta con que bajo el número multiplicado se escriba él mismo, corrido una cifra:

$$\begin{array}{r} 383 \\ + 383 \\ \hline 4213 \end{array} \quad \begin{array}{r} 383 \\ + 383 \\ \hline 4213 \end{array}$$

y se efectúa la suma.

Es útil recordar los resultados de multiplicar por 12, 13, 14 y 15, como se hace con los primeros 9 números. Así, la multiplicación de números de varias cifras por tales factores se acelera en gran medida. Supóngase que se desea multiplicar

$$\begin{array}{r} 4587 \\ \times 13 \\ \hline \end{array}$$

Procedamos así. Cada cifra del multiplicando multipliquémosla mentalmente, a la vez, por 13:

1.  $7 \times 13 = 91$ ; escribimos el 1, y memorizamos 9
2.  $8 \times 13 = 104$ ;  $104 + 9 = 113$ ; escribimos el 3 y memorizamos 11
3.  $5 \times 13 = 65$ ;  $65 + 11 = 76$ ; escribimos el 6, y memorizamos 7
4.  $4 \times 13 = 52$ ;  $52 + 7 = 59$ .

Total: 59.631

Después de algunos ejercicios, este método se asimila fácilmente.

Existe un método muy conveniente para la multiplicación de números de dos cifras por 11: basta con separar las cifras del multiplicando, y escribir entre ellas, su suma:

$$43 \times 11 = 473.$$

Si la suma de las cifras tiene dos cifras, entonces el número de sus docenas se suma a la primera cifra del multiplicando:

$$18 \times 11 = 4(12)8, \text{ es, decir } 528.$$

Indiquemos finalmente, algunos métodos de la división acelerada. Al dividir entre 5, multipliquemos por 2 dividendo y divisor:

$$3471:5 = 6942:10 = 694.2$$

Para dividir entre 25, multipliquemos cada número por 4:

$$3471:25 = 13\ 884:100 = 138.84$$

En forma parecida se procede para dividir entre  $1\frac{1}{2}$  ( $= 1.5$ ) y entre  $2\frac{1}{2}$  ( $= 2.5$ )

$$\begin{aligned} 3171:1\frac{1}{2} &= 6942:3 = 2314, \\ 3471:2,5 &= 13\ 884:10 = 1388,4 \end{aligned}$$

[Volver](#)

## 7. Curiosidades Aritméticas

$$100 = \left\{ \begin{array}{l} 1+ \\ +74 \times \frac{3}{6} + 25 \times \frac{9}{18} + \\ +95 \times \frac{3}{6} + 4 \times \frac{9}{18} \end{array} \right.$$

[Volver](#)